



МГУ - ШКОЛЕ

Математика

5

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72



МГУ – ШКОЛЕ

Учебники серии «МГУ – школе»
позволят учащимся получить хорошее
базовое образование и помогут
выработать правильный взгляд
на основы научного знания. Это важно.
Большинство школьных предметов –
фундамент Здания Науки. Лучше сразу
понять, как он устроен, чтобы потом,
при изучении верхних этажей,
не возвращаться к исследованию
фундамента.

Учебники серии «МГУ – школе» пишут
опытные школьные учителя вместе
с профессорами и преподавателями
Московского университета.

Надеюсь, что учёба по этим книгам
принесёт школьникам как пользу,
так и удовольствие.

*Ректор
Московского
университета
академик*

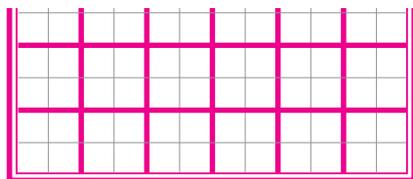
В. Садовниченко



МГУ - ШКОЛЕ



Математика



5 класс

**Учебник
для общеобразовательных
организаций**

*Допущено Министерством просвещения
Российской Федерации*

22-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2022

УДК 373:51+51(075.3)
ББК 22.1я721
МЗ4

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Авторы:

С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин

На учебник получены **положительные** заключения **научной** (заключение РАО № 423 от 14.11.2016 г.), **педагогической** (заключение РАО № 110 от 05.10.2016 г.) и **общественной** (заключение РКС № 100-ОЭ от 19.12.2016 г.) экспертиз.

Издание выходит в pdf-формате.

Математика. 5 класс: учеб. для общеобразоват. организаций : издание в pdf-формате / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. — 22-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. — 272 с. : ил. — (МГУ — школе).

ISBN 978-5-09-101221-7 (электр. изд.). — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-087619-3 (печ. изд.).

Данный учебник является первой частью двухлетнего курса математики для общеобразовательных организаций. Новое издание учебника дополнено и переработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС основного общего образования. В доработанном варианте в системе упражнений выделены специальные рубрики по видам деятельности. Также специально выделены задания для устной работы, задачи на построение, старинные задачи и задачи повышенной трудности. Каждая глава учебника дополнена историческими сведениями и интересными, занимательными заданиями.

УДК 373:51+51(075.3)
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-09-101221-7 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-087619-3 (печ. изд.)

© Издательство «Просвещение», 1999
© Издательство «Просвещение», 2012, 2017
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2012, 2019
Все права защищены

Дорогие пятиклассники!

В этом году вы продолжите изучение математики. Математика — наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Слово МАТЕМАТИКА происходит от греческого слова, означающего «знание». Одним из важнейших разделов математики является арифметика. Арифметика — наука о числах и правилах действий с ними. Слово АРИФМЕТИКА образовано от двух греческих слов, означающих «число» и «искусство».

Ещё в древние времена арифметика была нужна для торговли и других расчётов, а человек, владевший четырьмя арифметическими действиями, считался учёным, и таких учёных было мало.

Арифметика нужна в повседневной жизни, так как учит не только правилам вычислений, но и способам решения многих практических задач.

Изучение арифметики разовьёт ваши логические способности.

Арифметика поможет вам в изучении не только математики, но и других предметов, изучение которых также требует умения рассуждать, ставить вопросы, отвечать на них, правильно вычислять. Недаром ещё в древние времена арифметику называли царницей наук.

В этом году вам предстоит изучить натуральные числа, обыкновенные дроби и правила действий с ними, свойства этих действий, а также элементы геометрии. Весь материал учебника разбит на 4 главы, в каждой главе имеется несколько пунктов, содержащих теоретические сведения и практические упражнения. Новые термины (слова и словосочетания), важные факты выделены в тексте **жирным шрифтом**. Правила и свойства, которые полезно запомнить, даны на цветном фоне или в рамочке (см. с. 11).

Каждая глава имеет дополнения. Изучение первого пункта дополнения позволяет расширить знания, полученные при изучении главы, и научиться решать более сложные задачи. В исторических сведениях приведена информация, дополняющая изученное в главе, рассказывающая о развитии математики и учёных-математиках. В пункте «Занимательные задачи» приведены задания, умение решать которые поможет успешному участию в различных конкурсах и олимпиадах.

В конце учебника имеется раздел «Задания для повторения», в котором собраны упражнения на вычисления и текстовые задачи. Здесь имеется много исторических задач и заданий из старинных учебников и сборников задач, применявшихся при обучении ваших сверстников в давние времена. К некоторым задачам и упражнениям в учебнике приведены ответы (см. с. 266).

Если вы хотите учиться успешно, то с вниманием относитесь к тому, что написано в учебнике и что объясняет учитель, к выполнению домашнего задания.

Перед выполнением домашнего задания надо обязательно прочитать заданный на дом пункт учебника, вспомнить объяснение учителя. Это позволит вам подготовиться к выполнению упражнений и решению задач. Прочитайте вопросы, идущие после учебного текста, ответьте на них, а в случае затруднения найдите ответы в тексте учебника. Объяснение того или иного термина ищите в предметном указателе (см. с. 264), в котором все эти термины выписаны в алфавитном порядке.

Особое внимание уделите решению текстовых задач. В 5 классе они решаются арифметическими способами. Это необходимо для развития умения понимать текст задачи, устанавливая связи известных величин с неизвестными, составлять план решения задачи, осуществлять его и проверять, отвечает ли полученный результат условиям задачи. Именно арифметические способы решения текстовых задач развивают мышление и способность к учению.

При выполнении заданий обращайтесь внимание на специальные значки рядом с номером упражнения. Они имеют следующие значения:

 **4** — задания для устной работы;

 **23** — задания повышенной трудности;

 **69** — старинные задачи;

 **413** — задачи на построение.

Лучшему усвоению изученного поможет использование рабочей тетради, быстро проверить свои знания можно с помощью сборника тестов, а в дидактических материалах содержатся задания для самостоятельных и контрольных работ. В учебный комплект с нашим учебником входит ещё одна книга — «Задачи на смекалку». В ней имеется много задач, решая которые можно лучше освоить изучаемый материал и хорошо подготовиться к конкурсам и олимпиадам.

Желаем вам успехов в изучении арифметики — царицы наук!

Авторы

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И НУЛЬ

При изучении главы 1 вам предстоит привести в систему всё, что вы знаете о натуральных числах, познакомиться со свойствами сложения и умножения, научиться применять их для упрощения вычислений и узнать много нового. Вы научитесь отвечать на устные вопросы по учебному тексту и решать текстовые задачи по действиям — с вопросами и пояснениями.

1.1. Ряд натуральных чисел

Ещё в глубокой древности потребности обмена, скотоводства и т. п. привели людей к необходимости уметь считать предметы.

Числа, которые используют при подсчёте предметов, называют **натуральными числами**.

Таким образом, числа: один, два, три, ..., десять, ..., сто, ..., тысяча, ..., миллион, ..., миллиард, ... — натуральные числа.

Натуральные числа

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ...

записанные в порядке возрастания и без пропусков, образуют **натуральный ряд**, или **ряд натуральных чисел**. Все натуральные числа составляют **множество натуральных чисел**.

На первом месте в натуральном ряду стоит число 1, за ним следует число 2, затем число 3 и т. д.

В натуральном ряду **есть первое число 1, но нет последнего числа** — за каждым натуральным числом следует ещё одно натуральное число, большее предшествующего на единицу. Поэтому все натуральные числа записать невозможно, и при записи натурального ряда выписывают подряд несколько первых чисел, после которых ставят многоточие (три точки).

Отсутствие предметов для счёта условились обозначать числом ноль (0).

Ноль не считают натуральным числом.

- 1.** а) Назовите 15 первых натуральных чисел.
б) Считают ли число ноль натуральным числом?
- 2.** Есть ли в натуральном ряду:
а) первое число; б) последнее число?
- 3.** У каждого ли числа в натуральном ряду есть:
а) последующее число; б) предшествующее число?
- 4.** а) Назовите число, которое следует в натуральном ряду за числом: 13, 276, 3590, 999 999.
б) Назовите число, которое предшествует в натуральном ряду числу: 2, 74, 100, 3050, 438 109, 1 000 000.
- 5.** Сколько чисел в натуральном ряду:
а) от 1 до 29; б) от 1 до 38; в) от 30 до 38; г) от 100 до 125?
- 6.** Сколько чисел в натуральном ряду между числами:
а) 1 и 29; б) 1 и 38; в) 30 и 38; г) 100 и 125?

ИЩЕМ ИНФОРМАЦИЮ

- 7.** Найдите в учебнике, справочной литературе или Интернете ответы на следующие вопросы:
а) От какого слова происходит слово «арифметика»?
б) Что изучает арифметика?
в) В какое время и где жил Диофант — автор наиболее известного в древние времена учебника «Арифметика»?
г) В каком году вышло первое издание известного в России учебника «Арифметика» Леонтия Филипповича Магницкого?
д) В каких странах число ноль считают натуральным числом?
- 8.** В те далёкие времена, когда счёт не был хорошо развит, слово «семь» использовалось также в значении «много», что отражено в поговорках и загадках, например: семеро одного не ждут; семь одежек и все без застёжек. Приведите как можно больше таких примеров.

1.2 Десятичная система записи натуральных чисел

Практическая деятельность потребовала от человека не только умения считать, но и умения записывать числа. В старину для записи натуральных чисел использовались и особые рисунки, и чёрточки, и буквы, и т. п. (см. «Исторические сведения» на с. 65). В настоящее время принята **десятичная система записи чисел** (десятичная система счисления), в которой числа записывают при помощи десяти знаков:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Эти знаки называют **цифрами**.

При этом одна и та же цифра имеет различное значение в зависимости от того места (позиции), где она расположена в записи числа. Например, в записи числа 777 первая справа цифра 7 означает семь единиц, вторая — семь десятков, третья — семь сотен.

Поэтому десятичную систему счисления называют **позиционной**.

Важную роль в десятичной системе счисления играет число 10. Десять единиц называют десятком, десять десятков — сотней, десять сотен — тысячей и т. д.

1	— единица,
10	— десять,
100	— сто,
1000	— тысяча,
10 000	— десять тысяч,
100 000	— сто тысяч,
1 000 000	— миллион,
10 000 000	— десять миллионов,
100 000 000	— сто миллионов,
1 000 000 000	— миллиард,
10 000 000 000	— десять миллиардов,
100 000 000 000	— сто миллиардов.

Натуральные числа, записанные одной цифрой, называют **однозначными**, а записанные несколькими цифрами — **многозначными**: двумя — двузначными, тремя — трёхзначными и т. д.

Например, 1, 7, 9 — однозначные числа; 10, 77, 99 — двузначные числа; 100, 357 — трёхзначные числа; 537 633, 987 345 — шестизначные числа.

Первая цифра справа в десятичной записи числа называется цифрой первого разряда, вторая цифра справа — цифрой второго разряда и т. д. Каждые 10 единиц любого разряда составляют одну единицу следующего (более высокого) разряда.

Первую цифру слева в записи натурального числа называют цифрой высшего разряда. Она всегда отлична от нуля.

Чтобы прочесть многозначное число, цифры в его записи разбирают справа налево на группы по три цифры в каждой. Эти группы называют **классами**. В каждом классе цифры справа налево обозначают единицы, десятки и сотни этого класса.

Первый класс справа называют **классом единиц**, второй — **классом тысяч**, третий — **классом миллионов**, четвёртый — **классом миллиардов** и т. д.

...	Класс миллиардов			Класс миллионов			Класс тысяч			Класс единиц		
	сотни миллиардов	десятки миллиардов	единицы миллиардов	сотни миллионов	десятки миллионов	единицы миллионов	сотни тысяч	десятки тысяч	единицы тысяч	сотни	десятки	единицы

Например, чтобы прочесть число 148951784296, выделим в нём классы: 148 951 784 296 и прочитаем число единиц каждого класса слева направо:

148 миллиардов 951 миллион 784 тысячи 296.

Каждое натуральное число можно записать в виде суммы разрядных слагаемых.

Как это делается, видно из следующих примеров: число 99 состоит из 9 десятков и 9 единиц, поэтому

$$99 = 9 \cdot 10 + 9 \cdot 1,$$

число 3278 состоит из 3 тысяч, 2 сотен, 7 десятков и 8 единиц, поэтому

$$3278 = 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 1.$$

Вот ещё *примеры*:

$$5031 = 5 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 1 = 5 \cdot 1000 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 1.$$

$$3700 = 3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 1 = 3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100.$$

- 9.** Сколько знаков используют для записи натуральных чисел в десятичной системе? Как называют эти знаки?
- 10.** Какие цифры могут стоять в любом разряде числа, кроме высшего?
- 11.** Какие цифры могут стоять в высшем разряде числа?
- 12.** Прочитайте следующие числа:
10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000, 10 000 000.
- 13.** Запишите следующие числа: сто тысяч, миллион, десять тысяч, сто миллионов, миллиард, десять миллионов, сто миллиардов, десять миллиардов.
- 14.** Запишите и прочитайте число:
а) двузначное; б) трёхзначное;
в) четырёхзначное; г) семизначное.
- 15.** Запишите первое и последнее в натуральном ряду число:
а) двузначное; б) трёхзначное; в) четырёхзначное.
- 16.** Сколько натуральных чисел:
а) однозначных; б) двузначных; в) трёхзначных?
- 17.** В записи каждого из чисел назовите цифры разрядов единиц, десятков, сотен, тысяч, десятков тысяч, сотен тысяч и т. д.
а) 123; б) 1240; в) 102;
г) 4397; д) 13 487 905; е) 2 000 009.
- 18.** Запишите число, состоящее из:
а) 1 тысячи, 2 сотен, 3 десятков и 5 единиц;
б) 5 десятков тысяч, 9 тысяч, 7 сотен и 4 единиц;
в) 8 сотен и 6 десятков;
г) 7 сотен тысяч и 3 десятков.
- 19.** Прочитайте следующие числа, запишите их в виде суммы разрядных слагаемых:
а) 48; б) 159; в) 2945; г) 34 196;
д) 102; е) 150; ж) 4067; з) 10 504;
и) 6401; к) 5060; л) 12 007; м) 104 090.
- 20.** Запишите числа:
а) триста двадцать;
б) сто тридцать тысяч пятьдесят;

- в) двести восемь тысяч двадцать четыре;
 г) два миллиона три тысячи;
 д) одиннадцать миллионов двенадцать.

21. Запишите все трёхзначные числа без повторения одинаковых цифр, в записи которых используются цифры:

- а)  ; б) .

22. Запишите все трёхзначные числа, в записи которых используются цифры:

- а)  ; б) .

если разрешается повторять одинаковые цифры в записи одного числа.

***23.** а) В книге 120 страниц. Сколько цифр напечатали для нумерации страниц, начиная с третьей страницы?

б) Для нумерации страниц, начиная с третьей, использовано 169 цифр. Сколько страниц в книге?

***24.** Сколько раз используется каждая из цифр от 1 до 9 в записи первых 99 натуральных чисел?

***25.** Если в записи многозначного числа какие-либо цифры заменены буквами, то над записью числа ставят черту.

Например, запись $\overline{a5b7}$ означает, что это число содержит a тысяч ($a \neq 0$), 5 сотен, b десятков и 7 единиц, то есть $\overline{a5b7} = a \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + b \cdot 10 + 7$. Запишите в виде суммы разрядных слагаемых числа:

- а) $\overline{5b}$; б) \overline{ab} ; в) $\overline{1c8}$; г) $\overline{a9b}$;
 д) \overline{abc} ; е) $\overline{1ab8}$; ж) $\overline{a9b2}$; з) \overline{abcd} .

ИЩЕМ ИНФОРМАЦИЮ

26. Найдите в учебнике, справочной литературе или Интернете ответы на следующие вопросы:

а) Известно, что цифры 0, 1, 2, 3, ..., которые мы используем в вычислениях, называют арабскими, но придумали их не арабы. Кто придумал эти цифры?

б) Почему цифры 0, 1, 2, 3, ... называют арабскими?

1.3. Сравнение натуральных чисел

Числа можно сравнивать при помощи натурального ряда.

Из двух натуральных чисел больше то, которое в ряду натуральных чисел стоит правее (дальше от начала).

Например: число 8 больше числа 5, число 3 больше числа 1, так как в ряду натуральных чисел

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

8 правее 5, а 3 правее 1.

Натуральные числа можно сравнивать по их десятичной записи.

1) Из двух натуральных чисел больше то, у которого разрядов больше.

Например, 1001 больше 999 потому, что число 1001 содержит разрядов больше, чем число 999.

2) Из двух натуральных чисел с одинаковым числом разрядов больше то, у которого больше первая (слева направо) из неодинаковых цифр¹.

Например, 2821 больше 2819 потому, что у них одинаковое число разрядов, цифры четвёртых и третьих разрядов одинаковые, а цифры второго разряда у них разные: у первого числа больше, чем у второго.

3) Два натуральных числа равны, если у них одинаковое число разрядов и цифры одинаковых разрядов равны.

Например, числа 37 934 567 373 и 37 934 567 373 равны. В этом легко убедиться, записав их одно под другим:

$$\begin{array}{r} 37\ 934\ 567\ 373 \\ 37\ 934\ 567\ 373. \end{array}$$

Числа иногда удобно обозначать буквами латинского алфавита (см. форзац).

Если число a больше числа b , то пишут $a > b$ и говорят: « a больше b », или пишут $b < a$ и говорят: « b меньше a ».

Если a, b, c — натуральные числа и число b в ряду натуральных чисел находится правее числа a , а число c находится правее числа b , то из этого следует, что число c находится правее числа a , т. е.

из $a < b$ и $b < c$ следует, что $a < c$.

¹ Выражение «цифры равны» употребляется для упрощения речи. При этом подразумевается, что равны числа, им соответствующие.

В таких случаях пишут $a < b < c$ и говорят: « b больше a , но меньше c ».

Если числа a и b равны, то пишут $a = b$.

Вообще, равенство $a = b$ означает, что a и b одно и то же число.

Каждое натуральное число a больше нуля; это записывают так: $a > 0$.

Число, большее нуля, называют **положительным**.

Поэтому натуральные числа называют ещё **целыми положительными числами**. Число нуль также целое, но не положительное.

Натуральные числа и число нуль называют ещё целыми неотрицательными числами, так как, кроме неотрицательных чисел, есть ещё и отрицательные числа. Они будут изучаться в дальнейшем.

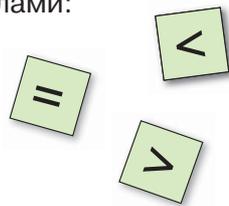
Если к ряду натуральных чисел приписать слева число 0, то получится **ряд неотрицательных целых чисел**:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

- 27.** Объясните, почему из $a < b$ и $b < c$ следует, что $a < c$.
- 28.** Какое число называют положительным?
- 29.** Является ли нуль положительным числом?
- 30.** Существует ли целое число, меньшее любого натурального числа?
- 31.** Прочитайте неравенство:
а) $1 < 2$; б) $7 < 10$; в) $11 < 23$;
г) $12 > 4$; д) $26 > 21$; е) $123 < 132$.
- 32.** Запишите неравенство:
а) 3 больше 1; б) 121 меньше 203;
в) 17 больше 16; г) 28 меньше 31;
д) 100 больше 31; е) 15 меньше 1500.
- 33.** Верно ли поставлены знаки сравнения:
а) $123 > 121$; б) $1000 < 100$;
в) $14\ 376 > 13\ 999$; г) $377\ 551 < 37\ 751$;
д) $105\ 987 > 105\ 978$; е) $756\ 453 < 756\ 454$?

34. Поставьте знак сравнения (=, <, >) между числами:

- | | |
|-----------------|--------------------|
| а) 123 и 123; | б) 169 и 196; |
| в) 253 и 252; | г) 348 и 299; |
| д) 102 и 1000; | е) 1250 и 999; |
| ж) 4687 и 5687; | з) 154 932 и 9999; |
| и) 641 и 700; | к) 5906 и 5096; |
| л) 1207 и 1207; | м) 4090 и 4900. |



35. Сравните числа:

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| а) 60 и 66; | б) 354 и 396; | в) 857 и 858; |
| г) 458 и 549; | д) 302 и 3002; | е) 1345 и 345; |
| ж) 0 и 687; | з) 932 и 0; | и) 649 и 650; |
| к) 6766 и 6666; | л) 8507 и 8570; | м) 6080 и 6080. |

36. Что больше:

- | | |
|---------------------|--------------------------|
| а) 20 см или 15 см; | б) 120 см или 1 м; |
| в) 1 м или 99 см; | г) 5 м 25 см или 526 см? |

37. Миша старше Маши, а Маша старше Кати. Кто старше: Миша или Катя?

38. Саша моложе Даши, а Даша моложе Коли. Кто моложе: Саша или Коля?

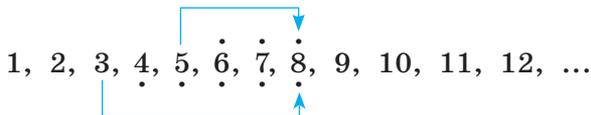
39. Сосна выше ели, а ель выше берёзы. Какое дерево самое высокое? самое низкое?

40. Арбуз тяжелее яблока, и дыня тяжелее яблока. Можно ли по этим данным определить, что тяжелее: арбуз или дыня?

41. Книга дороже тетради, и альбом дороже тетради. Можно ли по этим данным определить, что дороже: альбом или книга?

1.4. Сложение. Законы сложения

Чтобы сложить числа 5 и 3, можно рассуждать так. Рассмотрим ряд натуральных чисел, отметим в этом ряду число 5 и отсчитаем от него **вправо** 3 числа.



Получится число 8, называемое **суммой чисел 5 и 3**:

$$8 = 5 + 3.$$

Числа 5 и 3 называют **слагаемыми**.

Но можно отметить в натуральном ряду сначала число 3 и отсчитать от него вправо 5 чисел. Получится то же число 8, называемое **суммой чисел 3 и 5**:

$$8 = 3 + 5.$$

То есть сумма не меняется от перестановки слагаемых:

$$3 + 5 = 5 + 3.$$

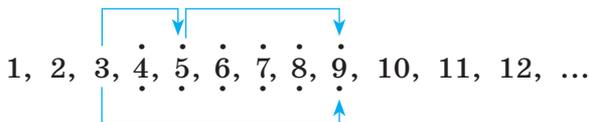
Для любых натуральных чисел a и b верно равенство:

$$a + b = b + a,$$

выражающее **переместительный закон сложения**:

От перестановки слагаемых сумма не меняется.

Сложим теперь три числа 3, 2 и 4. Для этого, применяя уже известный способ, отметим в натуральном ряду число 3, отсчитаем от него вправо 2 числа — получим число 5, отсчитаем от него вправо ещё 4 числа, получим число 9.



Следовательно, $(3 + 2) + 4 = 9$.

Отметим в натуральном ряду число 3, отсчитаем от него вправо $2 + 4 = 6$ чисел. Получим также 9: $3 + (2 + 4) = 9$.

Таким образом, мы получили равенство

$$(3 + 2) + 4 = 3 + (2 + 4),$$

показывающее, что если к сумме $(3 + 2)$ прибавить 4 или к 3 прибавить сумму $(2 + 4)$, то результат будет один и тот же.

Для любых натуральных чисел a , b и c верно равенство:

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

выражающее **сочетательный закон сложения**:

Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего чисел.

Сочетательный закон сложения позволяет записывать сумму нескольких слагаемых без скобок:

$$3 + (2 + 4) = (3 + 2) + 4 = 3 + 2 + 4.$$

Для любого числа a верны равенства:

$$a + 0 = a; \quad 0 + a = a.$$

Поэтому **переместительный и сочетательный законы сложения верны для любых неотрицательных чисел**. Например:

$$5 + 0 = 0 + 5, \quad (5 + 3) + 0 = 5 + (3 + 0).$$

В сумме нескольких слагаемых можно менять слагаемые местами и заключать их в скобки любым образом.

Например, верны равенства:

$$1 + 2 + 3 = 3 + 2 + 1; \quad 1 + 2 + 3 + 4 = (1 + 3) + (2 + 4).$$

Докажем эти равенства, применяя на каждом этапе рассуждений переместительный или сочетательный закон сложения:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 &= 1 + (2 + 3) = 1 + (3 + 2) = (3 + 2) + 1 = 3 + 2 + 1; \\ 1 + 2 + 3 + 4 &= 1 + (2 + 3) + 4 = 1 + (3 + 2) + 4 = \\ &= (1 + 3) + 2 + 4 = (1 + 3) + (2 + 4). \end{aligned}$$

Рассмотренные законы сложения широко применяются для упрощения вычислений. Например:

$$23 + 118 + 17 = (23 + 17) + 118 = 40 + 118 = 158.$$

42. Запишите равенство, выражающее переместительный закон сложения. Сформулируйте этот закон.

43. Запишите равенство, выражающее сочетательный закон сложения. Сформулируйте этот закон.

44. По каким правилам складывают числа с числом 0?

45. Сложите числа:

- | | | |
|------------------|-----------------|-----------------|
| а) $20 + 30$; | б) $33 + 67$; | в) $67 + 33$; |
| г) $400 + 300$; | д) $22 + 108$; | е) $95 + 6$; |
| ж) $170 + 130$; | з) $900 + 57$; | и) $23 + 100$. |

46. Вычислите:

- | | | |
|------------------|-------------------|--------------------|
| а) $60 + 24$; | б) $35 + 12$; | в) $57 + 13$; |
| г) $45 + 55$; | д) $302 + 200$; | е) $134 + 400$; |
| ж) $200 + 687$; | з) $132 + 450$; | и) $649 + 101$; |
| к) $606 + 160$; | л) $3070 + 105$; | м) $6009 + 1001$. |

47. Определите порядок выполнения действий при вычислении суммы:

- а) $(725 + 48) + 809$; б) $725 + (48 + 809)$.

48. Примените законы сложения для упрощения вычислений:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| а) $46 + 22 + 18$; | б) $19 + 56 + 11$; |
| в) $138 + 36 + 22$; | г) $456 + 22 + 78$; |
| д) $664 + 13 + 87$; | е) $134 + 408 + 166$; |
| ж) $7 + (93 + 456)$; | з) $42 + (58 + 495)$. |

49. Вычислите сумму:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| а) $78 + 89 + 22$; | б) $43 + 96 + 57$; |
| в) $437 + 39 + 13$; | г) $353 + 22 + 7$; |
| д) $784 + 79 + 21$; | е) $765 + 208 + 135$; |
| ж) $122 + (73 + 58)$; | з) $144 + (56 + 99)$. |

50. При сложении чисел бывает удобно слагаемое представить в виде суммы. Например:

$$75 + 109 = (74 + 1) + 109 = 74 + (1 + 109) = 74 + 110 = 184$$

или

$$97 + 28 = 97 + (3 + 25) = (97 + 3) + 25 = 100 + 25 = 125.$$

Используя этот приём, вычислите:

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| а) $399 + 26$; | б) $819 + 153$; | в) $256 + 98$; |
| г) $48 + 197$; | д) $305 + 239$; | е) $999 + 536$; |
| ж) $7499 + 137$; | з) $893 + 98$; | и) $1999 + 48$; |
| к) $2998 + 56$; | л) $325 + 3997$; | м) $423 + 4999$. |

51. Выполните сложение «цепочкой» по образцу:

$$45 + 5 + 17 + 20 = 50 + 17 + 20 = 67 + 20 = 87.$$

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| а) $8 + 9 + 13 + 22$; | б) $3 + 6 + 35 + 16$; |
| в) $37 + 33 + 19 + 3$; | г) $513 + 2 + 15 + 17$; |
| д) $4 + 6 + 19 + 21$; | е) $5 + 25 + 8 + 101$; |
| ж) $38 + 2 + 5 + 28$; | з) $164 + 6 + 9 + 12$. |

1.5. Вычитание

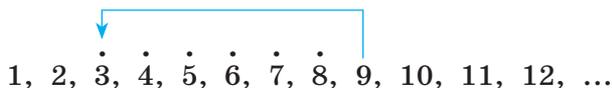
Разностью чисел a и b называют такое число, которое при сложении с числом b даёт число a . Число a называют **уменьшаемым**, число b — **вычитаемым**.

Разность чисел a и b обозначают $a - b$.

Таким образом, $(a - b) + b = a$ или $a - b + b = a$.

Покажем, как, используя натуральный ряд чисел, можно найти разность натуральных чисел a и b в случае, когда $a > b$.

Пусть надо найти разность $9 - 6$. Отметим в натуральном ряду число 9 и отсчитаем от него **влево** шесть чисел. Получим число 3.



Легко видеть, что сумма чисел 3 и 6 равна 9.

$$3 + 6 = 9.$$

Поэтому число 3 есть разность чисел 9 и 6, т. е.

$$9 - 6 = 3.$$

Отметим, что для любого числа a верны равенства:

$$a - 0 = a, \text{ потому что } a + 0 = a;$$

$$a - a = 0, \text{ потому что } 0 + a = a.$$

Замечание. С помощью неотрицательных целых чисел можно вычислить разность a и b только в том случае, когда a больше или равно b (пишут: $a \geq b$). В дальнейшем будут введены новые числа — отрицательные, с помощью которых можно будет из меньшего числа вычесть большее.

- 52.** Какое число называют разностью чисел a и b ?
- 53.** В равенстве $35 - 12 = 23$ назовите уменьшаемое, вычитаемое, разность.
- 54.** Как обозначают разность чисел a и b , если $a > b$?
- 55.** Чему равна разность равных чисел?
- 56.** Чему равна разность $a - 0$?
- 57.** Убедитесь с помощью натурального ряда, что $12 - 8 = 4$.
- 58.** Вычислите:
 а) $40 - 30$; б) $97 - 67$; в) $67 - 33$; г) $500 - 200$;
 д) $200 - 108$; е) $90 - 86$; ж) $170 - 130$; з) $600 - 87$.
- Восстановите равенство, вставив пропущенное число (**59, 60**):
- 59.** а) $63 - 45 + \dots = 63$; б) $\dots - 51 + 51 = 76$;
 в) $92 - \dots + 45 = 92$; г) $56 - \dots + \dots = 56$;
 д) $(45 + 12) - \dots = 45$; е) $(\dots + 16) - 16 = 47$;
 ж) $(\dots + 73) - 31 = 73$; з) $(72 + \dots) - \dots = 72$.
- 60.** а) $20 + \dots = 30$; б) $\dots + 47 = 50$;
 в) $40 - \dots = 23$; г) $\dots - 32 = 10$.

61. Найдите неизвестное число, обозначенное буквой x :

- а) $43 + x = 64$; б) $x + 45 = 59$;
в) $34 - x = 26$; г) $x - 53 = 35$.

62. Найдите разность чисел 46 и 22. Прибавьте к уменьшаемому и вычитаемому по 1; по 2; по 3 и в каждом случае найдите разность. Сравните полученные результаты.

***63.** Докажите, что от прибавления к уменьшаемому и вычитаемому одного и того же числа разность не изменяется. То есть если $a - b = c$, то $(a + n) - (b + n) = c$.

64. Используя утверждение, сформулированное в предыдущей задаче, вычислите:

- а) $68 - 19$; б) $35 - 18$; в) $65 - 17$;
г) $47 - 29$; д) $302 - 99$; е) $134 - 98$;
ж) $200 - 97$; з) $132 - 96$; и) $649 - 199$;
к) $606 - 399$; л) $370 - 298$; м) $793 - 495$.

65. Выполните действия «цепочкой» по образцу:

$$75 - 5 + 17 - 20 = 70 + 17 - 20 = 87 - 20 = 67.$$

- а) $18 + 9 - 23 + 32$; б) $33 - 6 + 25 - 17$;
в) $37 - 33 + 19 - 3$; г) $53 + 12 - 15 + 17$;
д) $14 - 6 + 29 - 11$; е) $45 + 25 - 18 + 101$;
ж) $38 + 3 - 5 - 28$; з) $64 - 16 + 19 - 2$.

66. а) Задумали число, увеличили его на 45 и получили 66 (рис. 1, а). Каким действием можно найти задуманное число? Найдите его.

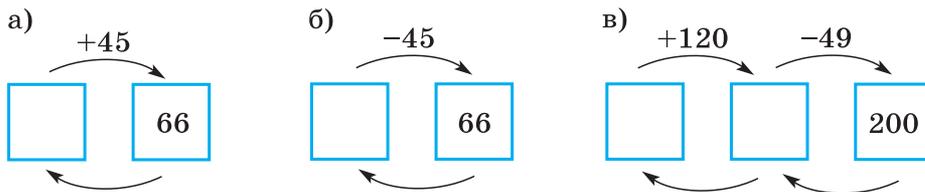


Рис. 1

б) Задумали число, уменьшили его на 45 и получили 66 (рис. 1, б). Найдите задуманное число.

в) Задумали число, увеличили его на 120, результат уменьшили на 49. Получили 200 (рис. 1, в). Найдите задуманное число.

1.6. Решение текстовых задач с помощью сложения и вычитания

С помощью сложения и вычитания решают задачи, в которых требуется найти число, большее или меньшее данного на несколько единиц, ответить на вопросы «на сколько больше?», «на сколько меньше?», «сколько всего?», «сколько осталось?» и т. п.

Решения таких задач можно оформить с помощью вопросов и ответов на них.

Задача 1. У покупателя было 50 р. Из них он отдал 30 р. за купленный товар и получил 2 р. сдачи. Сколько денег осталось у покупателя?

Решение.

1) Сколько рублей стоил купленный товар?

$$30 - 2 = 28 \text{ (р.)}$$

2) Сколько денег осталось у покупателя?

$$50 - 28 = 22 \text{ (р.)}$$

Ответ: 22 р.

К выбору действия сложения или вычитания для решения задачи надо подходить очень внимательно, так как, например, слова «на 10 больше» не всегда требуют сложения. Поэтому в решении задачи необходимо рассуждение, показывающее, какое действие надо применить.

Задача 2. Некто истратил 40 р., это на 10 р. больше, чем у него осталось. Сколько рублей у него было первоначально?

Решение. Истрачено на 10 р. больше, чем осталось, значит, осталось на 10 р. меньше, чем истрачено.

1) $40 - 10 = 30$ (р.) — осталось;

2) $40 + 30 = 70$ (р.) — было первоначально.

Ответ: 70 р.

67. а) Ученик токаря обточил 120 деталей за смену, а токарь на 36 деталей больше. Сколько деталей обточили токарь и его ученик вместе?

б) От Санкт-Петербурга до Петрозаводска 401 км, а от Петрозаводска до Мурманска на 643 км больше. Сколько километров от Санкт-Петербурга до Мурманска через Петрозаводск?

68. а) Общая тетрадь стоит 20 р., а блокнот на 4 р. больше. Сколько стоят общая тетрадь и блокнот вместе?

б) Мальчик прочитал 42 страницы книги, и ему осталось прочитать на 8 страниц больше, чем он уже прочитал. Сколько страниц в книге?

69.

Торговец купил некий товар за 7 р., продал его за 8 р., потом вновь купил за 9 р. и опять продал его за 10 р. Какую прибыль он получил?

70.

а) В коллекции имеется 128 марок. Из них 93 российские, а остальные иностранные. Каких марок больше в коллекции и на сколько?

б) За две недели бригада собрала 113 т картофеля. Из них за первую неделю — 54 т. В какую неделю картофеля собрано больше и на сколько?

в) За сентябрь и октябрь завод выпустил 193 станка, причём за сентябрь 98 станков. В какой из этих месяцев было выпущено больше станков и на сколько?

71.

а) Туристы планировали за три дня пройти 65 км. В первый день они прошли 24 км, во второй — на 3 км меньше. Сколько километров им осталось пройти в третий день?

б) В швейной мастерской было 900 м ткани. За первый месяц израсходовали 225 м ткани, за второй — на 23 м больше. Сколько ткани осталось в швейной мастерской к концу второго месяца?

72.

Из «Арифметики» Л. Н. Толстого.

а) У одного мужика 23 овцы, а у другого на 7 больше. Сколько у них овец вместе?

б) У одного мужика 26 овец, а у другого на 5 овец меньше. Сколько у них вместе овец?

в) У двух мужиков 50 овец, а у одного 15. На сколько овец у него меньше против другого?



73.

Задача С. А. Рачинского. Летом у меня целые сутки было открыто окно. В первый час влетел 1 комар, во второй — 2, в третий — 3 и т. д. Сколько комаров налетело за сутки?

74.

Первая бригада собрала за смену 52 прибора, вторая — на 9 приборов меньше, чем первая, а третья — на 12 приборов больше, чем вторая. Сколько всего приборов собрали три бригады за смену?

75.

а) Учащиеся 5 класса собрали 220 кг яблок, учащиеся 6 класса на 60 кг больше, а учащиеся 7 класса на 190 кг меньше, чем учащиеся 5 и 6 классов вместе. Сколько килограммов яблок собрали учащиеся трёх классов вместе?

б) За первый день старшеклассники собрали 312 ящиков огурцов, а за второй — на 120 ящиков больше. За третий день они собрали на 218 ящиков меньше, чем за первые два дня вместе. Сколько ящиков огурцов собрали старшеклассники за три дня?

76. В трёх классах 44 девочки — это на 8 меньше, чем мальчиков. Сколько мальчиков в трёх классах?

77. а) Сын на 24 года моложе мамы, а папа на 3 года старше мамы. Сколько лет папе, если сыну 10 лет?

б) Мама на 23 года старше сына, а папа на 2 года старше мамы. Сколько лет сыну, если папе 34 года?

78. а) Алёша прыгнул в длину на 3 м 12 см. Это на 9 см лучше результата Бори и на 13 см хуже результата Вовы. Какой результат в прыжках в длину показал Боря? Какой — Вова?

б) Доярки надоили за июль 300 тыс. литров молока. Это на 4 тыс. литров больше, чем в июне, и на 6 тыс. литров меньше, чем в августе. Сколько литров молока надоили доярки за летние месяцы?

79. а) Маша сказала, что у неё сестёр на две больше, чем братьев. На сколько в семье Маши сестёр больше, чем братьев?

б) Миша сказал, что у него сестёр на две больше, чем братьев. На сколько в семье Миши сестёр больше, чем братьев?

ИЩЕМ ИНФОРМАЦИЮ

80. Найдите в учебнике, справочной литературе или Интернете ответы на следующие вопросы:

а) В какое время жил известный российский учитель Сергей Александрович Рачинский и в какой школе он работал?

б) На какой известной картине изображён урок С. А. Рачинского?

ИССЛЕДУЕМ

81. На первой полке стояло 12 книг, на второй — на 3 книги больше, а на третьей полке — на a книг меньше, чем на двух первых полках вместе. Сколько книг на третьей полке?

а) Выберите такое число a , чтобы задача имела решение. Решите задачу с выбранным числом a .

б) Какое самое большое число a можно взять, чтобы задача имела решение, если на третьей полке была хотя бы одна книга?

в) Придумайте задачу, в которой число заменено буквой, и проведите похожее исследование.

1.7. Умножение. Законы умножения

Умножить натуральное число 3 на натуральное число 4 — значит найти сумму трёх слагаемых, каждое из которых 4. Получится число 12, называемое **произведением** чисел 3 и 4. Таким образом,

$$3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12.$$

Числа 3 и 4 называют **множителями**.

Для любого числа a верно равенство:

$$1 \cdot a = a.$$

Примеры: $5 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15,$
 $3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 = 15,$
 $3 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 = 3,$
 $1 \cdot 7 = 7.$

Для любых натуральных чисел a и b верно равенство:

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

выражающее **переместительный закон умножения**:

От перестановки множителей произведение не меняется.

Переместительный закон умножения легко проверить при подсчёте двумя способами числа квадратов на рисунке 2. Все квадраты можно расположить в 3 ряда по 4 квадрата — всего $3 \cdot 4$ квадрата (рис. 2, а). Но можно расположить все квадраты в 4 столбца по 3 квадрата — всего $4 \cdot 3$ квадрата (рис. 2, б). Так как число квадратов в обоих случаях одно и то же, то

$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3.$$

Для любых натуральных чисел a , b и c верно равенство:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

выражающее **сочетательный закон умножения**:

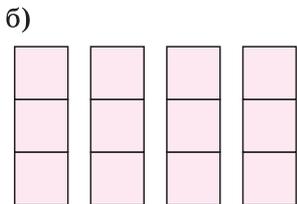
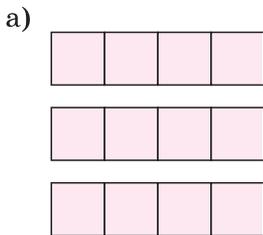


Рис. 2

Чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего чисел.

Сочетательный закон можно легко проверить при подсчёте числа кубиков на рисунке 3. Все кубики можно расположить в 2 столбца по $3 \cdot 4$ кубика в каждом — всего $2 \cdot (3 \cdot 4)$ кубика (рис. 3, а). Но можно расположить все кубики в $2 \cdot 3$ столбца по 4 кубика в каждом (рис. 3, б) — всего $(2 \cdot 3) \cdot 4$ кубика.

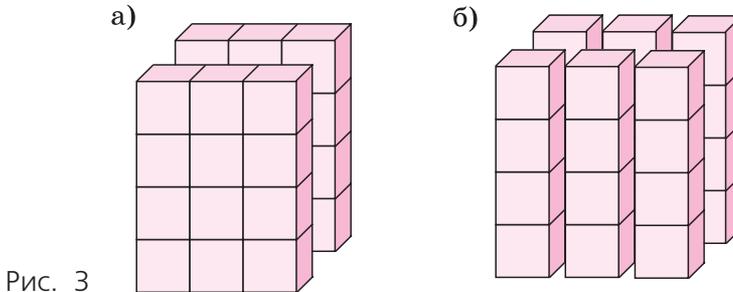


Рис. 3

Так как число кубиков в обоих случаях одно и то же, то

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4.$$

Рассмотренные законы умножения применяются для упрощения вычислений.

Пример. Вычислим произведение $(5 \cdot 48) \cdot 2$.

Для вычисления этого произведения надо умножить 5 на 48, а полученный результат умножить на 2.

Для упрощения вычислений применим переместительный и сочетательный законы умножения:

$$(5 \cdot 48) \cdot 2 = (48 \cdot 5) \cdot 2 = 48 \cdot (5 \cdot 2) = 48 \cdot 10 = 480.$$

Из сочетательного закона умножения следует, что произведение трёх (и более) чисел можно записать и без скобок:

$$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4, \quad (2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 7) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7.$$

Из законов умножения следует, что

в произведении нескольких множителей можно менять местами множители и заключать их в скобки любым способом.

Например,

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = (3 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 6), \quad 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3.$$

Отметим, что для любого натурального числа a верны равенства:

$$a \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot a = 0.$$

Кроме того,

$$0 \cdot 0 = 0.$$

Поэтому равенства $a \cdot b = b \cdot a$ и $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ верны для любых целых неотрицательных чисел.

Например: $5 \cdot 0 = 0 \cdot 5$, $(5 \cdot 3) \cdot 0 = 5 \cdot (3 \cdot 0)$.

С помощью умножения решают задачи, в которых требуется найти число, большее данного в несколько раз. Решения таких задач можно оформить с помощью вопросов и ответов на них, а можно использовать более короткую запись — после действия пояснять, что найдено этим действием.

Задача. Покупатель истратил на первую покупку 150 р., а на вторую — в 3 раза больше. Сколько денег он истратил на обе покупки?

Решение.

- 1) $150 \cdot 3 = 450$ (р.) — покупатель истратил на вторую покупку;
- 2) $150 + 450 = 600$ (р.) — всего истратил покупатель.

Ответ: 600 р.

82. Что значит умножить число 5 на число 6?

83. Чему равно произведение:

- а) единицы на любое натуральное число;
- б) нуля на любое натуральное число?

84. Запишите равенство, выражающее переместительный закон умножения, сформулируйте этот закон.

85. Запишите равенство, выражающее сочетательный закон умножения, сформулируйте этот закон.

86. Купили 3 коробки конфет по 400 г и 4 пачки печенья по 250 г. Вес чего можно найти следующим способом:

- а) $400 + 400 + 400$; б) $3 \cdot 400$; в) $250 + 250 + 250 + 250$;
- г) $4 \cdot 250$; д) $3 \cdot 400 + 4 \cdot 250$?

87. Замените сумму произведением:

а) $75 + 75 = 2 \cdot 75$;

б) $701 + 701$;

в) $82 + 82 + 82$;

г) $603 + 603 + 603$;

д) $45 + 45 + 45 + 45 + 45$;

е) $16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16$;

ж) $730 + 730 + 730 + 730$;

з) $172 + 172 + 172 + 172 + 172$.

88. Вычислите:

а) $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$;

б) $7 + 7 + 7 + 7$;

в) $8 + 8 + 8 + 8 + 8$;

г) $11 + 11 + 11 + 11 + 11$;

д) $15 + 15 + 15 + 15$;

е) $46 + 46 + 46 + 46 + 46 + 46$;

ж) $750 + 750 + 750 + 750$;

з) $128 + 128 + 128 + 128 + 128$;

и) $2011 + 2011 + 2011$.

89. Запишите в виде произведения:

а) $a + a + a = 3 \cdot a$;

б) $b + b + b + b$;

в) $c + c + c + c + c$;

г) $d + d + d$;

д) $a + a + a + a$;

е) $b + b + b$;

ж) $c + c + c + c$;

з) $d + d + d + d + d$;

и) $a + a + a + a + a + a$;

к) $b + b$.

90. а) Число 12 сначала увеличили в 2 раза, полученный результат увеличили ещё в 3 раза. Какой получился результат?

б) Задумали число, увеличили его в 3 раза, полученный результат увеличили ещё в 4 раза. Во сколько раз увеличилось число в итоге?

91. Какие законы использованы при следующих вычислениях:

$$20 \cdot 30 = (2 \cdot 10) \cdot (3 \cdot 10) = (2 \cdot 3) \cdot (10 \cdot 10) = 6 \cdot 100 = 600?$$

Вычислите:

а) $20 \cdot 50$;

б) $80 \cdot 40$;

в) $200 \cdot 40$;

г) $50 \cdot 400$;

д) $200 \cdot 100$;

е) $90 \cdot 2000$;

ж) $2000 \cdot 130$;

з) $700 \cdot 8000$;

и) $120 \cdot 6000$.

92. Запишите число в виде произведения двух множителей:

а) $48 = 8 \cdot \dots$;

б) $42 = 6 \cdot \dots$;

в) $72 = 8 \cdot \dots$;

г) $81 = 9 \cdot \dots$;

д) $36 = 6 \cdot \dots$;

е) $63 = 7 \cdot \dots$;

ж) $49 = 7 \cdot \dots$;

з) $56 = 8 \cdot \dots$;

и) $54 = 6 \cdot \dots$.

93. Запишите число в виде произведения двух равных множителей:

а) 1;

б) 4;

в) 0;

г) 9;

д) 16;

е) 25;

ж) 49;

з) 64;

и) 36;

к) 81;

л) 100;

м) 121.

94. Запишите каждое из чисел 15; 25; 13; 24; 36; 14; 17 в виде произведения двух множителей всеми возможными способами.

95. В школьную библиотеку привезли 20 пачек по 60 книг в каждой. Надо ли развязывать пачки, чтобы сосчитать число всех книг? Сколько книг привезли?

96. В девятиэтажном доме два подъезда. На каждом этаже в подъезде 6 квартир. Определите, какое из следующих произведений $2 \cdot 6$; $9 \cdot 6$; $2 \cdot (9 \cdot 6)$; $(2 \cdot 9) \cdot 6$ определяет количество квартир: а) в подъезде; б) на одном этаже в двух подъездах; в) в двух подъездах.

97. Для упрощения вычислений полезно помнить, что $2 \cdot 5 = 10$; $4 \cdot 25 = 100$; $8 \cdot 125 = 1000$.

Пользуясь этими равенствами, вычислите устно:

- а) $3 \cdot 2 \cdot 5$; б) $2 \cdot 7 \cdot 5$; в) $4 \cdot 9 \cdot 25$;
г) $7 \cdot 25 \cdot 4$; д) $125 \cdot 7 \cdot 8$; е) $12 \cdot 8 \cdot 125$;
ж) $2 \cdot 17 \cdot 5$; з) $16 \cdot 25 \cdot 4$; и) $13 \cdot 125 \cdot 8$.

98. Вычислите:

а) $16 \cdot 25 = 4 \cdot (4 \cdot 25) = 4 \cdot 100 = 400$;

- б) $82 \cdot 5$; в) $36 \cdot 25$; г) $25 \cdot 32$; д) $28 \cdot 25$;
е) $16 \cdot 125$; ж) $64 \cdot 125$; з) $75 \cdot 12$; и) $75 \cdot 44$.

99. Вычислите:

- а) $6 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 0$; б) $(108 \cdot 2 + 5 \cdot 13) \cdot 0$.

100. а) Увеличьте число 48 на 3, полученный результат увеличьте в 3 раза.

б) Увеличьте число 48 в 3 раза, полученный результат увеличьте на 3.

в) Одинаковые ли результаты получены в пунктах а и б?

101. а) В первый день туристы прошли пешком 18 км, а во второй день они проехали на автобусе в 5 раз больше. Какое расстояние туристы преодолели за два дня?

б) В первом мотке 42 м проволоки, а во втором в 3 раза больше. Сколько проволоки в двух мотках?

102. В многоквартирном доме 96 квартир, из них 24 — однокомнатные. Двухкомнатных квартир в 2 раза больше, чем однокомнатных. Остальные квартиры трёхкомнатные. Сколько в доме трёхкомнатных квартир?

103. а) На овощную базу сначала привезли помидоры на 6 машинах по 120 ящиков в каждой, потом ещё на 8 машинах по 140 ящиков в каждой. Сколько всего ящиков помидоров привезли на базу?

б) Токарь за один час обтачивает 12 деталей, а другой токарь — 11 деталей. Над выполнением задания первый работал 2 ч, потом второй — 3 ч. Сколько деталей они обточили вместе?

- 104.** а) Девочка купила 2 марки по 50 к. и 3 открытки по 65 к. Какую сдачу она должна получить с пяти рублей?
 б) В швейной мастерской было 12 кусков материи по 40 м в каждом и 8 кусков материи по 30 м в каждом. Сколько метров материи осталось после того, как израсходовали 340 м?
 в) На складе осталось 20 кусков материи по 40 м, 12 кусков материи по 30 м и 13 кусков материи по 20 м. Сколько метров материи осталось на складе?

1.8. Распределительный закон

Для любых натуральных чисел a , b и c верно равенство:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

выражающее **распределительный закон**:

Чтобы число умножить на сумму двух чисел, можно это число умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

Поясним этот закон на примере. Подсчитаем двумя способами число квадратов, изображённых на рисунке 4.

I способ. В каждом ряду расположено 3 жёлтых и 5 красных квадратов, а всего в каждом ряду $(3 + 5)$ квадратов. В четырёх же рядах всего $4 \cdot (3 + 5)$ квадратов.

II способ. Жёлтые квадраты расположены в четырёх рядах по 3 квадрата в каждом, т. е. жёлтых квадратов $4 \cdot 3$. Красных квадратов $4 \cdot 5$, а всего $4 \cdot 3 + 4 \cdot 5$ квадратов.

Одно и то же число квадратов подсчитано двумя способами, поэтому $4 \cdot (3 + 5) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5$.

Отметим, что распределительный закон верен не только для двух, но и для любого числа слагаемых. Например, верно равенство:

$$9 \cdot (3 + 4 + 5 + 6) = 9 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 9 \cdot 6.$$

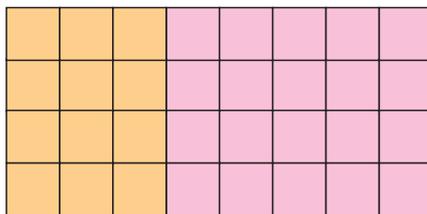


Рис. 4

Кроме того, если b больше или равно c ($b \geq c$), то верно равенство:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Например: $7 \cdot (5 - 3) = 7 \cdot 5 - 7 \cdot 3$.

Говорят, что в произведениях $4 \cdot (3 + 5)$ и $7 \cdot (5 - 3)$ раскрыли скобки и получили соответственно сумму $4 \cdot 3 + 4 \cdot 5$ и разность $7 \cdot 5 - 7 \cdot 3$.

Переход от произведений $a \cdot (b + c)$ и $a \cdot (b - c)$ соответственно к сумме $a \cdot b + a \cdot c$ и разности $a \cdot b - a \cdot c$ называют **раскрытием скобок**.

Переход от суммы $a \cdot b + a \cdot c$ к произведению $a \cdot (b + c)$ и от разности $a \cdot b - a \cdot c$ к произведению $a \cdot (b - c)$ называют **вынесением общего множителя за скобки**.

Вынесение общего множителя за скобки позволяет упрощать вычисления. Например:

1) $37 \cdot 31 + 37 \cdot 69 = 37 \cdot (31 + 69) = 37 \cdot 100 = 3700$;

2) $67 \cdot 95 - 67 \cdot 94 = 67 \cdot (95 - 94) = 67 \cdot 1 = 67$.

Любое из чисел a , b и c в равенстве $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ и в равенстве $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ ($b \geq c$) может быть нулём, поэтому распределительный закон верен и для целых неотрицательных чисел.

Так как для неотрицательных чисел справедлив переместительный закон умножения, то верны равенства:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ и } (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

105. Запишите равенство, выражающее распределительный закон, сформулируйте этот закон.



106. Для каких чисел выполняется распределительный закон?

107. Примените распределительный закон, раскрыв скобки:

а) $5 \cdot (32 + 17) = 5 \cdot 32 + 5 \cdot 17$; б) $19 \cdot (28 + 43) = 19 \cdot \dots + 19 \cdot \dots$;

в) $7 \cdot (3 + 8)$; г) $10 \cdot (15 + 6)$; д) $5 \cdot (10 + 12)$; е) $6 \cdot (12 + 4)$.

108. Используя распределительный закон, запишите произведение в виде суммы:

а) $10 \cdot (12 + 3)$; б) $(12 + 31) \cdot 15$; в) $(17 + 43) \cdot 8$;

г) $(93 + 28) \cdot 16$; д) $5 \cdot (8 + a)$; е) $7 \cdot (x + 9)$;

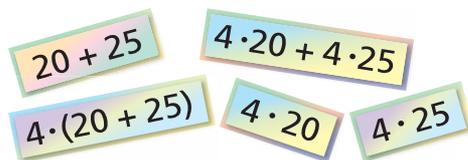
ж) $12 \cdot (a + b)$; з) $(x + y) \cdot 15$; и) $a \cdot (x + y)$.

Здесь a , b , x и y — натуральные числа.

- 109.** Используя распределительный закон, запишите сумму в виде произведения:
а) $7 \cdot 3 + 7 \cdot 2$; б) $5 \cdot 3 + 5 \cdot 8$; в) $8 \cdot 9 + 8 \cdot 7$; г) $5 \cdot 3 + 5 \cdot 10$.
- 110.** Вынесите общий множитель за скобки:
а) $8 \cdot 3 + 8 \cdot 2$; б) $8 \cdot 3 + 5 \cdot 3$; в) $9 \cdot 13 + 7 \cdot 9$; г) $27 \cdot 3 + 3 \cdot 2$.
- 111.** Запишите произведение в виде разности:
а) $8 \cdot (18 - 10) = 8 \cdot 18 - 8 \cdot 10$; б) $5 \cdot (22 - 14) = 5 \cdot \dots - 5 \cdot \dots$;
- в) $7 \cdot (13 - 8)$; г) $10 \cdot (15 - 6)$; д) $(9 - 3) \cdot 12$;
е) $(42 - 24) \cdot 15$; ж) $5 \cdot (18 - 3)$; з) $(91 - 1) \cdot 7$.
- 112.** Используя распределительный закон, запишите разность в виде произведения:
а) $7 \cdot 13 - 7 \cdot 2$; б) $5 \cdot 23 - 5 \cdot 8$;
в) $18 \cdot 9 - 18 \cdot 7$; г) $25 \cdot 13 - 25 \cdot 10$.
- 113.** Вынесите общий множитель за скобки:
а) $7 \cdot 32 - 7 \cdot 23$; б) $9 \cdot 31 - 9 \cdot 17$;
в) $27 \cdot 3 - 7 \cdot 3$; г) $71 \cdot 17 - 17 \cdot 11$.
- 114.** Вычислите, используя распределительный закон:
а) $37 \cdot 12 + 37 \cdot 88$; б) $7 \cdot 12 + 8 \cdot 7$;
в) $37 \cdot 12 - 37 \cdot 2$; г) $7 \cdot 102 - 2 \cdot 7$;
д) $28 \cdot 9 + 22 \cdot 9$; е) $25 \cdot 11 - 25 \cdot 1$;
ж) $18 \cdot 9 + 18 \cdot 1$; з) $25 \cdot 99 + 25$;
и) $101 \cdot 17 - 17$; к) $41 \cdot 50 - 50$.
- 115.** Перепишите, заполняя пропуски:
а) $\dots \cdot (15 + 12) = 5 \cdot 15 + 5 \cdot 12$;
б) $12 \cdot (\dots + \dots) = 12 \cdot 7 + 12 \cdot 8$;
в) $\dots \cdot (\dots + \dots) = 14 \cdot 15 + 14 \cdot 29$.
- 116.** Вынесите общий множитель за скобки:
а) $20 \cdot 47 + 20 \cdot 23$; б) $57 \cdot 81 - 39 \cdot 81$;
в) $51 \cdot 43 + 12 \cdot 43$; г) $38 \cdot 39 - 38 \cdot 20$.
- 117.** Вычислите:
а) $47 \cdot 42 + 42 \cdot 153$; б) $57 \cdot 81 - 71 \cdot 57$;
в) $61 \cdot 45 + 55 \cdot 61$; г) $39 \cdot 138 - 137 \cdot 39$.
- 118.** Вычислите:
а) $7 \cdot 55 + 7 \cdot 45 + 3 \cdot 45 + 3 \cdot 55$;
б) $8 \cdot 2 + 2 \cdot 92 + 8 \cdot 98 + 2 \cdot 8$;
в) $37 \cdot 59 + 37 \cdot 41 + 63 \cdot 59 + 41 \cdot 63$;
г) $356 \cdot 73 + 644 \cdot 27 + 73 \cdot 644 + 27 \cdot 356$.

119. Первый рабочий изготавливает 25 деталей в час, а второй — 20 деталей в час. Укажите, какое из следующих выражений $20 + 25$; $4 \cdot (20 + 25)$; $4 \cdot 25$; $4 \cdot 20 + 4 \cdot 25$; $4 \cdot 20$ определяет число деталей, изготавливаемых:

- а) первым рабочим за 4 ч;
- б) вторым рабочим за 4 ч;
- в) двумя рабочими за 1 ч;
- г) двумя рабочими за 4 ч.



Исследуем

- 120.** а) Каким может быть число a , чтобы вы могли устно вычислить разность двух произведений: $987 \cdot 654 - 987 \cdot a$? Приведите несколько примеров.
- б) Какое самое большое натуральное число a можно взять, чтобы разность в задании а была натуральным числом?
- в) Какое число a нужно взять, чтобы разность в задании а была нулём?

1.9. Сложение и вычитание чисел столбиком

При сложении и вычитании однозначных чисел удобно пользоваться таблицей сложения:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Результаты сложения и вычитания однозначных чисел надо помнить наизусть.

Многочисленные числа складывают и вычитают по разрядам, используя переместительный, сочетательный и распределительный законы. Например,

$$1) 35 + 21 = 3 \cdot 10 + 5 + 2 \cdot 10 + 1 = (3 + 2) \cdot 10 + (5 + 1) = 50 + 6 = 56;$$

$$2) 68 - 43 = 6 \cdot 10 + 8 - 4 \cdot 10 - 3 = (6 - 4) \cdot 10 + (8 - 3) = 20 + 5 = 25.$$

Обычно сложение и вычитание выполняют столбиком, записывая числа друг под другом так, чтобы цифры одинаковых разрядов стояли друг под другом, и начинают вычисления с разряда единиц.

Эти вычисления можно записать столбиком подробно (рис. 5 и 6).

Обычно вычисления записывают короче (рис. 7 и 8).

Если сложение в каком-либо разряде даст в результате число, большее или равное 10, то десять единиц этого разряда заменяют единицей следующего (справа налево) разряда, прибавляя эту единицу к цифре следующего разряда. Например,

$$\begin{aligned} 45 + 39 &= 4 \cdot 10 + 5 + 3 \cdot 10 + 9 = \\ &= (4 + 3) \cdot 10 + (5 + 9) = \\ &= 7 \cdot 10 + 14 = 7 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 4 = \\ &= (7 + 1) \cdot 10 + 4 = 80 + 4 = 84. \end{aligned}$$

Это вычисление можно записать столбиком подробно (рис. 9). Обычно пишут короче, запоминая, что в разряд десятков добавляется один десяток (рис. 10).

При этом говорят так: к 5 прибавим 9 — получим 14, пишем 4 (единицы) и 1 (десяток) запоминаем, к 4 прибавим 3 — получим 7, да ещё 1 запомнили — будет 8 (десятков), пишем 8.

Если при вычитании в каком-либо разряде цифра уменьшаемого меньше цифры вычитаемого, то нужно «занять» одну единицу в следующем (справа налево) разряде уменьшаемого. Например,

$$\begin{aligned} 72 - 9 &= 7 \cdot 10 + 2 - 9 = 6 \cdot 10 + (10 + 2) - 9 = \\ &= 6 \cdot 10 + (12 - 9) = 60 + 3 = 63. \end{aligned}$$

		3	5
	+	2	1
		<hr/>	
	+	5	0
		5	6

Рис. 5

		6	8
	-	4	3
		<hr/>	
	+	2	0
		2	5

Рис. 6

		3	5
	+	2	1
		<hr/>	
		5	6

Рис. 7

		6	8
	-	4	3
		<hr/>	
		2	5

Рис. 8

		4	5
	+	3	9
		<hr/>	
	+	1	4
		<hr/>	
	+	7	0
		8	4

Рис. 9

		1	
	+	4	5
		<hr/>	
	+	3	9
		<hr/>	
		8	4

Рис. 10

		.		
		7	2	
	-		9	
			3	
	+	6	0	
		6	3	

Рис. 11

		.		
		7	2	
	-		9	
			3	
	+	6	0	
		6	3	

Рис. 12

Это вычисление записывают, отмечая точкой разряд, в котором «занята» единица (рис. 11). Обычно пишут короче (рис. 12).

Говорят: из 2 вычтешь 9 нельзя, занимаем 1 десяток, из 12 вычтем 9 — получим 3 (единицы), пишем 3, из 6 вычтем 0 — получим 6 (десятков), пишем 6.

121. Объясните на примере, как выполняют сложение и вычитание столбиком.

122. Какие законы используют при сложении и вычитании столбиком?

123. Перепишите в тетрадь и выполните сложение:

$$\begin{array}{r} + 375 \\ \underline{123} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} б) + 824 \\ \underline{326} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} в) + 875 \\ \underline{324} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} г) + 575 \\ \underline{394} \end{array}$$

124. Вычислите сумму:

а) 325 и 866;

б) 6292 и 4596;

в) 2099 и 85 204;

г) 9128 и 7357;

д) 6312 и 1599;

е) 4890 и 1716;

ж) 6565 и 3535;

з) 3928 и 4215.

125. Прибавьте к числу:

а) 4890 число 1716;

б) 399 число 1523;

в) 9091 число 909;

г) 999 число 3001;

д) 5617 число 9861;

е) 7831 число 2169;

ж) 8435 число 6890;

з) 376 число 9734.

126. Увеличьте число:

а) 756 на 234;

б) 592 на 343;

в) 2592 на 375;

г) 709 на 2570;

д) 383 на 2154;

е) 1708 на 2425.

Вычислите сумму (**127—129**).

127. а) $784 + 296$;

б) $365 + 645$;

в) $999 + 854$;

г) $652 + 999$;

д) $3599 + 111$;

е) $234 + 7214$.

128. а) $52\,338 + 4691$;

б) $6856 + 77\,281$;

в) $757\,664 + 15\,979$;

г) $18\,635 + 574\,985$;

д) $1234 + 4321$;

е) $56\,789 + 98\,765$.

129. а) $10\,004 + 57\,806$;

б) $30\,008 + 7992$;

в) $384\,759 + 240\,901$;

г) $159\,996 + 7\,080\,004$;

д) $191\,919 + 919\,191$;

е) $454\,545 + 545\,455$;

ж) $123\,321 + 876\,679$;

з) $987\,654 + 123\,456$.

130. Перепишите в тетрадь и выполните вычитание:

$$\begin{array}{r} \text{а) } \underline{728} \\ - \underline{325} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \underline{1356} \\ - \underline{246} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } \underline{92\ 507} \\ - \underline{2\ 400} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{г) } \underline{10\ 101} \\ - \underline{9\ 898} \\ \hline \end{array}$$

131. а) Уменьшите 309 на 12.

б) Уменьшите произведение чисел 409 и 5 на 920.

в) Из числа 9999 вычтите произведение чисел 999 и 9.

г) Разность чисел 9999 и 999 увеличьте в 9 раз.

д) Вычтите сумму чисел 328 и 532 из числа 1000.

е) Вычтите произведение чисел 12 345 и 9 из числа 1 000 000.

132. Вычислите неизвестное число x , удовлетворяющее равенству:

а) $x + 209 = 700$;

б) $296 + x = 925$;

в) $x - 283 = 79$;

г) $x - 8096 = 10\ 951$;

д) $756 - x = 236$;

е) $839 - x = 125$.

133. На доске были записаны верно выполненные примеры на сложение и вычитание, потом некоторые цифры стёрли и заменили их буквами. Перепишите примеры, заменяя буквы цифрами так, чтобы опять получились верные записи:

$$\begin{array}{r} \text{а) } \begin{array}{l} 72и \\ + 1р3 \\ \hline т98 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \begin{array}{l} д52 \\ - 6в4 \\ \hline 28а \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } \begin{array}{l} 5ин \\ + д79 \\ \hline о381 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{г) } \begin{array}{l} ну56 \\ - 5л8 \\ \hline 88ь \end{array} \end{array}$$

134. Восстановите примеры, считая, что одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры:

$$\begin{array}{r} \text{а) } \begin{array}{l} 636 \\ + 766 \\ \hline а300 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \begin{array}{l} а4а \\ + 33а \\ \hline б084 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } \begin{array}{l} \text{удар} \\ + \text{удар} \\ \hline \text{драка} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{д) } \begin{array}{l} \text{деталь} \\ + \text{деталь} \\ \hline \text{изделие} \end{array} \end{array}$$

Выполните действия (**135**, **136**).

135. а) $(5486 + 3578) + 1422$;

б) $4523 + (3788 + 1477)$;

в) $(357 + 768 + 589) + (332 + 211 + 643)$;

г) $(357 + 298 + 428) + (102 + 572 + 643)$;

д) $(259 + 728 + 293) + (541 + 607 + 272)$.

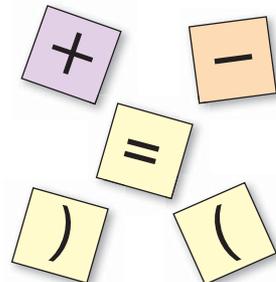
136. а) $375\ 026 + 408\ 724 - 49\ 678$;

б) $700\ 000 - (50\ 345 + 168\ 724)$;

в) $900\ 000 - (125\ 480 + 89\ 256)$;

г) $1\ 700\ 000 - (836\ 724 + 64\ 048)$;

д) $1\ 000\ 000 - (35\ 724 - 5928)$.



1.10. Умножение чисел столбиком

Для вычисления произведения однозначных чисел удобно пользоваться таблицей умножения:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Таблицу умножения однозначных чисел надо помнить наизусть. Кроме того, надо помнить, что для любого числа a верны равенства:

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a, \quad a \cdot 0 = 0.$$

			3	2	7	
		×				8
				5	6	
	+		1	6	0	
			2	4	0	0
			2	6	1	6

Рис. 13

			3	2	7	
		×				8
			2	6	1	6

Рис. 14

Вычисление произведения однозначного и многозначного чисел, и тем более двух многозначных чисел, требует применения не только таблицы умножения, но и законов сложения и умножения.

Пример 1. Вычислим произведение $327 \cdot 8$.

$$\begin{aligned} 327 \cdot 8 &= (300 + 20 + 7) \cdot 8 = \\ &= 300 \cdot 8 + 20 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 2400 + 160 + 56 = 2616. \end{aligned}$$

Это решение можно записать столбиком подробно (рис. 13). Обычно пишут короче (рис. 14) и говорят: 7 умножим на 8 — получим 56, 6 пишем, 5 запоминаем; 2 умножим на 8 — получим 16, да ещё 5 запомнили, будет 21, 1 пишем, 2 запоминаем; 3 умножим на 8 — получим 24, да ещё 2 запомнили, будет 26, пишем 26.

		×	3	2	9
				2	4
			<hr/>		
	+		1	3	1
			6	5	8
			<hr/>		
			7	8	9
					6

Рис. 15

		×	3	2	9
				2	4
			<hr/>		
	+		1	3	1
			6	5	8
			<hr/>		
			7	8	9
					6

Рис. 16

		×	3	2	4
			2	0	3
			<hr/>		
			9	7	2
	+		0	0	0
			6	4	8
			<hr/>		
			6	5	7
					7
					2

Рис. 17

Пример 2. Вычислим произведение $329 \cdot 24$.

$$329 \cdot 24 = 329 \cdot (20 + 4) = \\ = 329 \cdot 20 + 329 \cdot 4 = 6580 + 1316 = 7896.$$

Это решение можно записать столбиком подробно (рис. 15). Обычно пишут короче (рис. 16).

		×	3	2	4
			2	0	3
			<hr/>		
			9	7	2
	+		6	4	8
			<hr/>		
			6	5	7
					7
					2

Рис. 18

Пример 3. Вычислим произведение $324 \cdot 203$.

$$324 \cdot 203 = 324 \cdot (200 + 3) = 324 \cdot 200 + 324 \cdot 3 = 64\,800 + 972 = 65\,772.$$

Это решение можно записать столбиком подробно (рис. 17). Обычно пишут короче (рис. 18).

Пример 4. Вычислим произведение $460 \cdot 48$.

Так как

$$460 \cdot 48 = 46 \cdot 10 \cdot 48,$$

то можно сначала умножить 46 на 48 и полученный результат умножить на 10, т. е. приписать к нему справа нуль.

Вычисления можно записать столбиком (рис. 19). Аналогично поступают и в других случаях (рис. 20).

		×	4	6	0
			4	8	
			<hr/>		
			3	6	8
	+		1	8	4
			<hr/>		
			2	2	0
					8
					0

Рис. 19

			×	4	3	2				×	7	5	3	0
					6	5	0				2	6	0	0
					<hr/>						<hr/>			
					2	1	6	0			4	5	1	8
		+			2	5	9	2		+	1	5	0	6
					<hr/>						<hr/>			
					2	8	0	8	0	0	1	9	5	7
														8
														0
														0
														0

Рис. 20

137. Какие законы используют при умножении столбиком?

138. Объясните, как выполнено умножение:

$$\begin{array}{r} \text{а) } 748 \\ \times 6 \\ \hline 4488 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } 973 \\ \times 50 \\ \hline 48650 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } 7050 \\ \times 7 \\ \hline 49350 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{г) } 926 \\ \times 38 \\ \hline 7408 \\ + 2778 \\ \hline 35188 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{д) } 326 \\ \times 502 \\ \hline 652 \\ + 1630 \\ \hline 163652 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{е) } 4830 \\ \times 4900 \\ \hline 4347 \\ + 1932 \\ \hline 23667000 \end{array}$$

Вычислите произведение чисел (**139–143**).

- 139.** а) $12 \cdot 10$; б) $32 \cdot 100$; в) $65 \cdot 1000$;
г) $20 \cdot 100$; д) $300 \cdot 1000$; е) $1500 \cdot 100$;
ж) $10 \cdot 190$; з) $1000 \cdot 20$; и) $100 \cdot 380$;
к) $129 \cdot 100$; л) $1000 \cdot 130$; м) $2900 \cdot 10$.

- 140.** а) $24 \cdot 2$; б) $31 \cdot 3$; в) $52 \cdot 4$; г) $71 \cdot 9$;
д) $23 \cdot 8$; е) $9 \cdot 18$; ж) $65 \cdot 4$; з) $76 \cdot 5$;
и) $48 \cdot 9$; к) $8 \cdot 34$; л) $7 \cdot 85$; м) $9 \cdot 78$.

- 141.** а) $132 \cdot 5$; б) $645 \cdot 3$; в) $5 \cdot 418$; г) $7 \cdot 338$;
д) $106 \cdot 4$; е) $401 \cdot 6$; ж) $4381 \cdot 2$; з) $7713 \cdot 8$;
и) $7 \cdot 6204$; к) $9 \cdot 5007$; л) $6 \cdot 5769$; м) $7 \cdot 777$.

- 142.** а) $23 \cdot 11$; б) $42 \cdot 12$; в) $22 \cdot 33$;
г) $53 \cdot 31$; д) $68 \cdot 61$; е) $64 \cdot 24$;
ж) $79 \cdot 23$; з) $72 \cdot 25$; и) $42 \cdot 68$;
к) $37 \cdot 33$; л) $74 \cdot 15$; м) $37 \cdot 66$;
н) $48 \cdot 37$; о) $54 \cdot 29$; п) $63 \cdot 36$.

- 143.** а) $86 \cdot 49$; б) $92 \cdot 16$; в) $88 \cdot 97$;
г) $951 \cdot 18$; д) $663 \cdot 26$; е) $847 \cdot 64$;
ж) $101 \cdot 332$; з) $302 \cdot 648$; и) $321 \cdot 562$;
к) $955 \cdot 317$; л) $861 \cdot 242$; м) $999 \cdot 732$;
н) $679 \cdot 679$; о) $125 \cdot 125$; п) $420 \cdot 450$.

144. Вычислите наиболее простым способом:

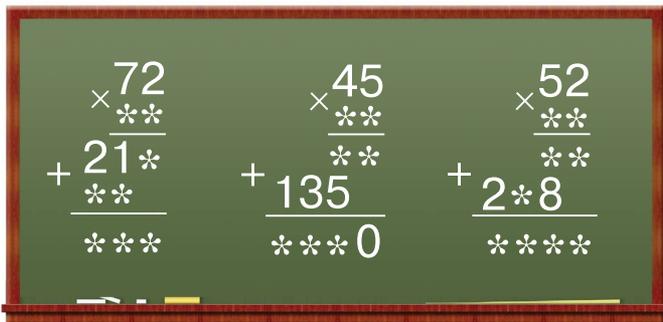
- а) $24 \cdot 98 + 24 \cdot 2$; б) $305 \cdot 199 + 305 \cdot 1$;
в) $49 \cdot 18 + 18$; г) $153 \cdot 598 + 306$.

145. Выполните действие:

- а) $325 \cdot 40$; б) $3508 \cdot 250$; в) $7380 \cdot 420$;
г) $3800 \cdot 550$; д) $48 \cdot 9$; е) $789 \cdot 1020$.

Исследуем

- 146.** Произведение четырёх последовательных натуральных чисел равно 3024. Найдите эти числа.
- 147.** На доске записали несколько примеров на умножение натуральных чисел, потом некоторые цифры стёрли и вместо них поставили звёздочки. Восстановите стёртые цифры.



- 148.** Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Некий человек купил ладану 137 пудов. За каждый пуд заплатил по 6 р. и захотел узнать, сколько стоит покупка.
- 149.** Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Некто купил зерна 2359 четвертей, за четверть платил по 65 коп. и отдал всех денег 153 335 коп. Проверьте вычисления.
- 150.** а) Купили дюжину (12 штук) носовых платков по 1 р. за штуку, 4 пары носков по 4 р. за пару и 2 майки по 10 р. за штуку. Сколько денег заплатили?
б) С завода отправили 9 подвод с посудой, на каждой по 2 ящика, и в каждом ящике по 45 дюжин тарелок. Сколько тарелок отправлено с завода?



ИССЛЕДУЕМ

151. Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Если хочешь, чтобы умножение было с некоторым удивлением, т. е. в произведении получилось 111 111, или 222 222, или 333 333 и так до 999 999, то умножай 777 на 143 и будет 111 111. А когда 143 умножишь на 2 и результат умножишь на 777, то получишь 222 222, и т. д. Получите описанным способом произведения от 333 333 до 999 999.

152. Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Если хочешь в произведении иметь 121 212, возьми 12, умножь на 2 и на 10, будет 240, прибавь первое число, будет 252. Этот результат умножь на 481, будет 121 212. Получите описанным способом числа 232 323, 343 434 и 898 989.

1.11. Степень с натуральным показателем

Мы уже знаем, что сумму нескольких одинаковых слагаемых принято записывать короче — в виде произведения:

$$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \cdot 5.$$

Произведение одинаковых чисел также записывают короче:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$$

и называют **степенью**. Читают «пять в степени четыре». Запись 2^3 («два в степени три») означает $2 \cdot 2 \cdot 2$. При этом число 2 называют **основанием степени**, а число 3 — **показателем степени**. Число 3 показывает, сколько раз нужно взять множителем основание степени — число 2:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Степенью числа a с натуральным показателем n ($n > 1$) называют произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}} \quad (n > 1).$$

Пример 1. Вычислим 2^4 .

$$2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ раза}} = 16.$$

Пример 2. Вычислим 3^7 .

$$3^7 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{7 \text{ раз}} = 2187.$$

Таким же образом можно вычислить любую степень числа с натуральным показателем, бóльшим единицы. Остаётся выяснить, что означает запись 2^1 , т. е. степень числа с показателем 1.

Принято считать, что $2^1 = 2$, $5^1 = 5$, $100^1 = 100$, т. е. **первая степень любого числа равна самому числу**:

$$a^1 = a.$$

Вторую степень числа называют также **квадратом** числа. Запись 5^2 читают «**пять в квадрате**».

Третью степень числа называют **кубом** числа. Запись 5^3 читают «**пять в кубе**». О происхождении этих названий будет рассказано в следующей главе.

Особую роль в десятичной системе играют числа 10, 100, 1000 и т. д. Их можно записать в виде степени:

10	— 10^1 ,
100	— 10^2 ,
1000	— 10^3 ,
10 000	— 10^4 ,
100 000	— 10^5 ,
1 000 000	— 10^6 ,
10 000 000	— 10^7 ,
100 000 000	— 10^8 ,
1 000 000 000	— 10^9 ,
10 000 000 000	— 10^{10} ,
100 000 000 000	— 10^{11} .

С названиями этих чисел вы уже знакомы (см. с. 7). Следующие степени числа 10 называют так:

1 000 000 000 000	— 10^{12} — триллион,
10 000 000 000 000	— 10^{13} — десять триллионов,
100 000 000 000 000	— 10^{14} — сто триллионов.

Дальше идут квадриллионы, квинтиллионы и т. д., но этими названиями на практике почти не пользуются. Например, скорость света 300 000 000 (триста миллионов) метров в секунду удобнее записать так: $3 \cdot 10^8$ м/с.

- 153.** Что называют степенью числа a с натуральным показателем n ($n > 1$)?
- 154.** Чему равна первая степень любого числа?
- 155.** Что называют: а) квадратом числа; б) кубом числа?
- 156.** Запишите сумму в виде произведения:
а) $5 + 5$; б) $8 + 8 + 8 + 8$; в) $a + a + a$.
- 157.** Запишите произведение в виде степени:
а) $5 \cdot 5$; б) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$; в) $a \cdot a \cdot a$.
- 158.** Используя специальные названия второй и третьей степени, прочитайте степени: 2^2 ; 2^3 ; 3^2 ; 3^3 ; 4^3 ; 5^2 .

Вычислите (**159–162**).

- 159.** а) 3^2 ; б) $3 \cdot 2$; в) 5^2 ; г) $5 \cdot 2$; д) 9^2 ; е) $9 \cdot 2$; ж) 2^3 ; з) $2 \cdot 3$.
- 160.** а) 2^2 ; б) 4^2 ; в) 6^2 ; г) 7^2 ; д) 8^2 ; е) 9^2 ; ж) 10^2 ; з) 1^2 .
- 161.** а) 3^3 ; б) 4^3 ; в) 5^3 ; г) 1^3 ; д) 0^3 ; е) 10^3 ; ж) 6^3 ; з) 7^3 .
- 162.** а) 3^4 ; б) 3^5 ; в) 1^8 ; г) 0^4 ; д) 100^1 ; е) 1^1 ; ж) 11^2 ; з) 12^2 .
- 163.** Составьте таблицу квадратов чисел от 0 до 15.
- 164.** Составьте таблицу кубов чисел от 0 до 10.
- 165.** Вычислите степени числа 2 с показателями от 1 до 10.
- 166.** Запишите число в виде квадрата натурального числа:
а) 9; б) 25; в) 100; г) 16; д) 49; е) 81; ж) 64; з) 36.
- 167.** Вычислите степени числа 10 с показателями от 1 до 7.
- 168.** Запишите в виде степени с основанием 10 число:
а) 100; б) 1000; в) 10 000; г) 10; д) 100 000; е) 1 000 000.
- 169.** Запишите число в виде произведения одинаковых чисел:
а) 4; б) 1; в) 27; г) 256.
- 170.** Запишите каждое число в виде степени: 8; 125; 64; 243.

ИССЛЕДУЕМ

- 171.** Среди первых пяти натуральных чисел имеются два неравных числа m и n , такие, что $n^m = m^n$. Найдите эти числа.

1.12. Деление нацело

Пусть a и b — натуральные числа и a больше или равно b ($a \geq b$). Говорят, что a делится на b нацело, если существует натуральное число c , при умножении которого на b получается a :

$$a = b \cdot c.$$

Обычно слово «нацело» в этой фразе опускается. При этом пишут: $a : b = c$ и называют a — делимым, b — делителем, c — частным.

Любое натуральное число a делится на 1 и само на себя:

$$a : 1 = a, \quad a : a = 1,$$

так как $a \cdot 1 = a$, $1 \cdot a = a$.

Например, 12 делится на 1 и на 12.

При делении нуля на любое натуральное число получается нуль:

$$0 : a = 0,$$

потому что $0 \cdot a = 0$.

Делить на нуль нельзя.

Любое натуральное число a делить на нуль нельзя, потому что не существует такого числа c , для которого выполнялось бы равенство $a : 0 = c$ (так как $c \cdot 0 = 0 \neq a$).

Так как $c \cdot 0 = 0$ для любого числа c , то можно было бы считать, что $0 : 0 = c$. Но в этом случае частным могло бы быть любое число c . Поэтому считают, что нуль на нуль делить нельзя.

Отметим важное свойство частного:

делимое и делитель можно умножить или разделить нацело на одно и то же натуральное число — частное от этого не изменится.

Например: $48 : 24 = 2$,

$$(48 \cdot 2) : (24 \cdot 2) = 96 : 48 = 2; \quad (48 : 2) : (24 : 2) = 24 : 12 = 2.$$

172. Когда говорят, что натуральное число a делится нацело на натуральное число b ?

173. Назовите делимое, делитель и частное в примере $35 : 5 = 7$.

- 174.** На какие числа делится нацело любое натуральное число?
- 175.** Что получается при делении нуля на любое натуральное число?
- 176.** Можно ли делить на ноль?
- 177.** Какое число называют частным чисел 8 и 2; 20 и 4?
- 178.** Докажите, что $18 : 2 = 9$; $12 : 4 = 3$; $0 : 5 = 0$.
- 179.** Объясните, почему верно равенство:
а) $(42 : 6) \cdot 6 = 42$; б) $(625 : 25) \cdot 25 = 625$.
- 180.** Заполните пропуски:
а) $(56 : 8) \cdot \dots = 56$; б) $(54 : \dots) \cdot 9 = 54$;
в) $(45 : \dots) \cdot \dots = 45$; г) $(50 : \dots) \cdot \dots = 50$.
- 181.** Вычислите:
а) $(144 : 12) \cdot 12$; б) $(132 : 11) \cdot 11$.
- 182.** Запишите следующее число в виде произведения двух множителей различными способами:
а) 12; б) 15; в) 25; г) 20; д) 27; е) 0; ж) 16; з) 24.
- 183.** Объясните, как найти неизвестное число x :
а) $31 \cdot x = 93$; б) $x \cdot 4 = 168$;
в) $120 : x = 40$; г) $x : 42 = 2$.
- 184.** Найдите частное чисел:
а) 40 и 8; б) 72 и 9; в) 64 и 8;
г) 560 и 7; д) 140 и 7; е) 360 и 6;
ж) 606 и 2; з) 808 и 4; и) 909 и 9.
- 185.** Вычислите частное по *образцу*:
а) $400 : 80 = (400 : 10) : (80 : 10) = 40 : 8 = \dots$;
б) $800 : 400$; в) $16\,000 : 800$; г) $300 : 50$;
д) $6400 : 1600$; е) $20\,000 : 4000$; ж) $2000 : 500$.
- 186.** При делении на 5 и на 50 иногда удобно бывает умножить делимое и делитель на 2 и выполнить деление на 10 или 100 соответственно. Вычислите частное по *образцу*:
а) $95 : 5 = (95 \cdot 2) : (5 \cdot 2) = 190 : 10 = \dots$;
б) $2400 : 50 = (2400 \cdot 2) : (50 \cdot 2) = 4800 : 100 = \dots$;
в) $3200 : 5$; г) $1320 : 5$; д) $4320 : 5$;
е) $2350 : 50$; ж) $7200 : 50$; з) $9200 : 50$.

187. Вычислите:

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| а) $120 : 5$; | б) $320 : 5$; | в) $440 : 5$; |
| г) $2100 : 50$; | д) $2020 : 5$; | е) $2130 : 5$; |
| ж) $700 : 50$; | з) $800 : 50$; | и) $3100 : 50$; |
| к) $170 : 5$; | л) $1800 : 50$; | м) $600 : 50$. |

Доказываем

188. Докажите, что если каждое из натуральных чисел a и b делится на натуральное число c , то верно равенство

$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

189. Выполните деление по образцу:

$$\text{а) } (48 + 88) : 8 = 48 : 8 + 88 : 8 = 6 + 11 = 17;$$

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| б) $(99 + 810) : 9$; | в) $(150 + 55) : 5$; |
| г) $(33 + 99) : 3$; | д) $(44 + 88) : 2$. |

190. Вычислите, записав делимое в виде суммы, по образцу:

$$\text{а) } 84 : 4 = (80 + 4) : 4 = 80 : 4 + 4 : 4 = 20 + 1 = 21;$$

$$\text{б) } 92 : 4 = (80 + 12) : 4 = \dots;$$

- | | | |
|---------------|-----------------|-----------------|
| в) $96 : 3$; | г) $56 : 4$; | д) $81 : 3$; |
| е) $51 : 3$; | ж) $132 : 11$; | з) $264 : 12$. |

1.13. Решение текстовых задач с помощью умножения и деления

С помощью умножения и деления решают задачи, в которых требуется найти число, большее или меньшее данного в несколько раз, ответить на вопросы «во сколько раз больше?», «во сколько раз меньше?» и т. п.

Задача 1. Число 50 увеличили в 3 раза, полученное число увеличили на 100. Во сколько раз увеличили число 50 за два раза?

Решение.

1) $50 \cdot 3 = 150$ — число, полученное после первого увеличения;

2) $150 + 100 = 250$ — число, полученное после второго увеличения;

3) $250 : 50 = 5$ (раз) — во столько раз увеличили число 50 за два раза.

Ответ: в 5 раз.

К выбору умножения и деления для решения задачи надо подходить очень внимательно, так как, например, слова «в 3 раза больше» не всегда требуют умножения. Поэтому в решении задачи необходимо рассуждение, показывающее, какое действие надо применить.

Задача 2. Некто прочитал 90 страниц книги, это в 3 раза больше, чем ему осталось прочитать. Сколько страниц в книге?

Решение. Прочитано в 3 раза больше страниц, чем осталось прочитать, поэтому осталось прочитать в 3 раза меньше, чем уже прочитано.

1) $90 : 3 = 30$ (с.) — осталось прочитать;

2) $90 + 30 = 120$ (с.) — в книге.

Ответ: 120 страниц.

При решении текстовых задач часто приходится применять все арифметические действия.

Задача 3. В понедельник магазин продал 5 коробок яиц, а во вторник — 7 коробок. Известно, что от продажи яиц во вторник магазин выручил на 720 р. больше, чем в понедельник. Сколько денег выручил магазин от продажи яиц за два дня?

Решение.

1) $7 - 5 = 2$ (кор.) — стоят 720 р.;

2) $720 : 2 = 360$ (р.) — стоит одна коробка яиц;

3) $7 + 5 = 12$ (кор.) — продано всего;

4) $360 \cdot 12 = 4320$ (р.) — выручил магазин за два дня.

Ответ: 4320 р.

?

- 191.** а) За 8 марок заплатили 4 р. Сколько стоит одна марка?
б) Одна линейка стоит 2 р. 80 к. Сколько купили линеек, если за них заплатили 8 р. 40 к.?
в) За один час поезд прошёл 60 км. За сколько часов он пройдёт 240 км, если будет идти с той же скоростью?
г) За три часа велосипедист проехал 36 км. Сколько километров он проезжал в час?

- 192.** Мальчику 12 лет, он в 3 раза старше своей сестры.
а) На сколько лет мальчик старше своей сестры?
б) На сколько лет мальчик будет старше своей сестры через 4 года?
в) Во сколько раз мальчик будет старше своей сестры через 4 года?

- 193.** а) На каждую телегу нагрузили по 8 мешков картофеля. На сколько телег погрузили 72 мешка?

б) В некоторые из 40 пакетов насыпали сахарный песок. Осталось 10 пустых пакетов. Во сколько пакетов насыпали сахарный песок?

в) В швейной мастерской осталось 2 куска материи по 60 м. Сколько метров материи осталось?

194. а) У Алёши, Бори и Васи вместе 120 марок. У Алёши марок столько, сколько у Бори и Васи вместе. Сколько марок у Алёши?

б) Коля, Миша и папа поймали 24 карася. Папа поймал столько, сколько его сыновья вместе, а они поймали карасей поровну. Сколько карасей поймал Коля?

195.

Родник в 24 мин даёт бочку воды. Сколько бочек воды даёт родник в сутки?

196. а) В магазин привезли 720 бутылок лимонада в ящиках по 20 бутылок. Сколько было ящиков?

б) В мешке 60 кг сахара. Весь сахар рассыпали в пакеты по 500 г. Сколько получилось пакетов?

197. а) Уменьшите число 64 на 8, полученный результат уменьшите в 4 раза.

б) Уменьшите число 64 в 4 раза, полученный результат уменьшите на 8.

198. а) Велосипедисты проехали от города *A* до города *B* 168 км, а от города *B* до города *C* — в 3 раза меньше. Сколько всего километров проехали велосипедисты?

б) Девочка прочитала 56 страниц, и ей осталось прочитать в 4 раза меньше, чем она уже прочитала. Сколько страниц в книге?

199. Маме 36 лет, сыну 12, а дочери 4 года. Во сколько раз дочь моложе матери? Во сколько раз брат старше сестры?

200. а) У Васи было 46 марок. За год его коллекция увеличилась на 230 марок. Во сколько раз увеличилась коллекция?

б) У Коли было 42 р., он потратил 36 р. Во сколько раз у Коли стало меньше денег?

201. Для награждения победителей математической олимпиады купили 10 книг по 9 р. и 12 комплектов головоломок — на общую сумму 222 р. Сколько стоит один комплект головоломок?



- 202.** а) В 12 коробках — 144 карандаша. Сколько карандашей в 15 таких же коробках?
б) Автомат на кондитерской фабрике заворачивает 324 конфеты за 3 мин. Сколько конфет он завернёт за 5 мин?
- 203.** а) Для поездки трёх взрослых и двух детей по железной дороге купили билеты общей стоимостью 600 р. Сколько стоит детский билет, если билет для взрослого стоит 160 р.?
б) Для санатория купили 12 кресел и 50 стульев на общую сумму 98 800 р. Сколько стоит кресло, если стул стоит 860 р.?
- 204.** В мягком вагоне 18 спальных мест, а в плацкартном вагоне 54 места. В составе скорого поезда 1 мягкий вагон, 6 плацкартных и 11 купейных. Сколько спальных мест в купейном вагоне, если во всех вагонах состава 738 спальных мест?
- 205.** а) Велотурист в каждый из 10 дней проезжал по 36 км. Сколько километров в день ему необходимо проезжать, чтобы вернуться обратно за 9 дней?
б) Велотурист в каждый из 10 дней проезжал по 21 км. За сколько дней он может вернуться обратно, если будет проезжать в день по 35 км?
- 206.** Некто работает 24 дня в месяц, тратит в каждый из тридцати дней по 50 р. и откладывает за месяц 900 р. Сколько он получает за рабочий день?
- 207.** а) Маме 36 лет, она на 31 год моложе бабушки и в 6 раз старше дочери. Сколько лет каждой?
б) Папе 34 года, он в 2 раза моложе дедушки и на 29 лет старше сына. Сколько лет каждому?
- 208.** а) Первая машинистка печатает 10 страниц в час, а вторая за 5 ч печатает столько же страниц, сколько первая за 4 ч. Сколько страниц отпечатают обе машинистки за 3 ч совместной работы?
б) Первый рабочий за один час делает 32 детали, а второй за 4 ч делает столько деталей, сколько первый за 5 ч. За сколько часов они вместе сделают 216 деталей?
- 209.** На изготовление 2100 деталей первая бригада затрачивает на 2 ч меньше, чем вторая, которая делает 420 деталей за 1 ч. Сколько деталей за час делает первая бригада?



210. а) В двух корзинах лежало 86 яблок. Когда из первой во вторую переложили 3 яблока, то яблок в корзинах стало поровну. Сколько яблок было в каждой корзине первоначально?

б) На двух полках лежало 196 пачек печенья. Когда с первой полки на вторую переложили 28 пачек, то на двух полках печенья стало поровну. Сколько пачек печенья было на каждой полке первоначально?

211. а) У брата и сестры вместе 28 открыток. Сестра отдала брату 4 открытки, и открыток у них стало поровну. Сколько открыток было у каждого из них сначала?

б) У брата и сестры вместе было 46 марок. Брат отдал сестре 3 марки, и марок у них стало поровну. Сколько марок было у каждого из них первоначально?

212. а) В двух комнатах было 56 человек. Когда в первую пришли ещё 12 человек, а во вторую — 8 человек, то в комнатах людей стало поровну. Сколько человек было в каждой комнате первоначально?

б) В двух комнатах 45 человек. Из первой вышли 9, а из второй — 14, и людей в комнатах стало поровну. Сколько человек было в комнатах сначала?

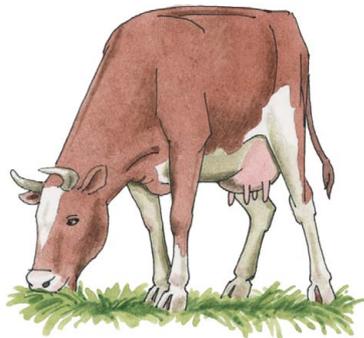
213. а) В магазин привезли 420 мужских и женских часов. Когда продали 150 мужских и 140 женских часов, то тех и других осталось поровну. Сколько мужских часов привезли в магазин?

б) На заправочную станцию привезли 540 т бензина и дизельного топлива. Когда того и другого продали поровну, то осталось 120 т бензина и 130 т дизельного топлива. Сколько бензина привезли на станцию?

214. На четырёх полках стояло 164 книги. Когда с первой полки сняли 16, со второй переставили на третью 15, а на четвёртую поставили 12 новых книг, то на всех полках книг оказалось поровну. Сколько книг было на каждой полке первоначально?

215. За задание, выполненное двумя рабочими, заплатили 5100 р. Сколько денег получит каждый, если первый сделал 48 деталей, а второй — 54 детали?

216. На лугу паслось несколько коров. У них ног на 54 больше, чем голов. Сколько коров паслось на лугу?



1) Сколько частей составляют 120 книг?

$$1 + 3 = 4 \text{ (части).}$$

2) Сколько книг приходится на 1 часть (стоит на II полке)?

$$120 : 4 = 30 \text{ (книг).}$$

3) Сколько книг стоит на I полке?

$$30 \cdot 3 = 90 \text{ (книг).}$$

Ответ: 90 и 30 книг.

Задача 3. За рубашку папа заплатил на 120 р. больше, чем за галстук. Известно, что рубашка дороже галстука в 4 раза. Сколько стоит рубашка?

Решение. Если стоимость галстука составляет 1 часть, то стоимость рубашки составляет 4 такие же части (рис. 22).

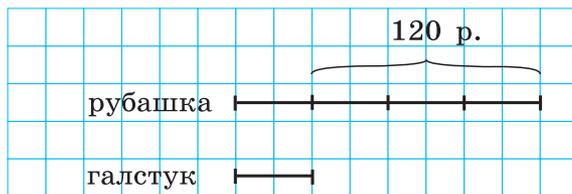


Рис. 22

1) $4 - 1 = 3$ (части) — приходится на 120 р.;

2) $120 : 3 = 40$ (р.) — приходится на 1 часть (стоит галстук);

3) $4 \cdot 40 = 160$ (р.) — стоит рубашка.

Ответ: 160 р.

218. Для варенья из малины на 2 части ягод берут 3 части сахара.

а) Сколько сахара следует взять на 2 кг 600 г ягод?

б) Сколько килограммов малины было у мамы, если для варки варенья она взяла 4 кг 500 г сахара?

219. При пайке изделий из жести применяют сплав, содержащий 2 части свинца и 5 частей олова.

а) Сколько граммов свинца и олова в отдельности содержит кусок сплава весом 350 г?

б) Сколько свинца и олова в отдельности содержит кусок сплава, в котором олова на 360 г больше, чем свинца?

220. При помоле ржи на каждые три части муки получается одна часть отходов. Сколько смололи ржи, если муки получилось на 36 ц больше, чем отходов?

221. а) Для компота купили 1800 г сухофруктов. Яблоки составляют 4 части, груши — 3 части, а сливы — 2 части общего веса сухофруктов. Сколько граммов яблок, груш и слив было в отдельности?

б) Яблоки составляют 7 частей, груши — 4 части, а сливы — 5 частей веса сухофруктов. Сколько граммов яблок, груш и слив в отдельности содержится в 1600 г сухофруктов?

***222.** Для компота взяли 6 частей яблок, 5 частей груш и 3 части слив. Оказалось, что груш и слив вместе взяли 2 кг 400 г. Сколько взяли яблок? Сколько всего взяли фруктов?

***223.** а) При изготовлении кофейного напитка «Ячменный» на 4 части ячменя берут 1 часть цикория. Сколько пачек напитка изготовлено, если каждая пачка весит 250 г и на изготовление всей партии напитка израсходовано ячменя на 36 кг больше, чем цикория?

б) При изготовлении кофейного напитка «Наша марка» на 7 частей кофе берут 6 частей цикория, 5 частей желудей и 2 части каштанов. Сколько пачек напитка изготовлено, если каждая пачка весит 200 г, а кофе и цикория вместе израсходовали 26 кг?

?**224.** а) Сплав содержит 1 часть свинца и 2 части олова. Во сколько раз в этом сплаве олова больше, чем свинца?

б) Сплав содержит олова в 3 раза больше, чем свинца. Сколько частей олова приходится на 1 часть свинца?

225. Купили 60 тетрадей, причём тетрадей в клетку было в 2 раза больше, чем тетрадей в линейку. Пользуясь рисунком 23, определите, сколько частей приходится на тетради в линейку; на тетради в клетку; на все тетради. Сколько купили тетрадей в линейку? Сколько — в клетку?

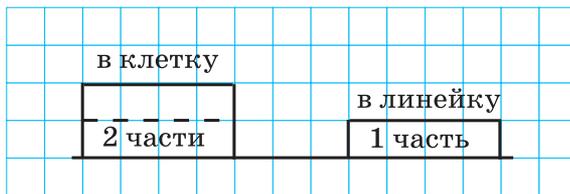


Рис. 23

226. а) За рубашку и галстук папа заплатил 200 р. Рубашка дороже галстука в 4 раза. Сколько стоит галстук?

б) В плацкартном вагоне в 3 раза больше спальных мест, чем в мягком вагоне. Всего в плацкартном и мягком вагонах 72 места. Сколько спальных мест в мягком вагоне?

- 227.** а) Календарь дороже общей тетради в 2 раза, а вместе они стоят 36 р. Сколько стоит календарь?
 б) Мальчик и девочка рвали в лесу орехи. Всего они сорвали 120 штук. Девочка сорвала в 2 раза меньше мальчика. Сколько орехов было у мальчика и девочки в отдельности?
 в) Девочка прочитала в 3 раза меньше страниц, чем ей осталось прочитать. Всего в книге 176 страниц. Сколько страниц прочитала девочка?

- 228.** а) Ученик купил тетрадей в клетку в 3 раза больше, чем тетрадей в линейку, причём их было на 18 больше, чем тетрадей в линейку. Сколько всего тетрадей купил ученик?
 б) На первой полке стояло в четыре раза больше книг, чем на второй. Это на 12 книг больше, чем на второй полке. Сколько книг стояло на каждой полке?

- 229.** а) Девочка прочитала в 3 раза больше страниц, чем ей осталось прочитать. Известно также, что она прочитала на 78 страниц больше, чем ей осталось прочитать. Сколько страниц прочитала девочка?
 б) Книга дороже тетради в 3 раза, а тетрадь дешевле книги на 12 р. Сколько стоит книга?



- 230.** *Задача С. А. Рачинского.* Я провёл год в деревне, в Москве и в дороге — и притом в Москве в 8 раз более времени, чем в дороге, а в деревне в 8 раз более, чем в Москве. Сколько дней провёл я в дороге, в Москве и в деревне?

Придумываем задачу

- 231.** Придумайте задачу «на части». Убедитесь, что числовые данные для задачи подобраны хорошо и она имеет решение. Прочитайте задачу классу, и пусть кто-то её решит, а вы оцените это решение.

1.15. Деление с остатком

Пример 1. Число 14 не делится нацело на 3, так как нет натурального числа, при умножении которого на 3 получится 14.

В самом деле, будем перемножать последовательно числа натурального ряда на 3. Получим числа, расположенные в порядке возрастания:

$$1 \cdot 3 = 3, 2 \cdot 3 = 6, 3 \cdot 3 = 9, 4 \cdot 3 = 12, 5 \cdot 3 = 15 \dots$$

Первое из этих чисел есть 3, второе больше первого на 3, третье больше второго тоже на 3 и т. д. Среди этих чисел нет числа 14. Но среди них есть наибольшее число, меньшее 14, — это число $12 = 4 \cdot 3$. Чтобы получить число 14, надо прибавить к 12 число 2, которое меньше 3.

Итак, справедливо равенство $14 = 4 \cdot 3 + 2$, где 4 — наибольшее число, произведение которого на 3 меньше 14. Это число называют **неполным частным** от деления 14 на 3, а число 2 — **остатком**. Остаток меньше делителя.

Результат деления 14 на 3 записывают так:

$$14 : 3 = 4 \text{ (остаток 2).}$$

Пример 2. $38 = 7 \cdot 5 + 3$, где $3 < 5$. Здесь 7 — неполное частное от деления 38 на 5, а 3 — остаток. Поэтому можно записать:

$$38 : 5 = 7 \text{ (остаток 3).}$$

Если одно число делится нацело на другое, то иногда удобно считать, что оно делится с остатком, равным нулю.

Чтобы разделить число a на число b , надо найти частное $a : b$, если a делится нацело на b , или найти неполное частное и остаток, если a не делится нацело на b .

Для однозначных и двузначных чисел деление, как правило, производится в уме, а для многозначных — уголком. Объясним это на примерах.

Пример 3. Разделим 42 на 3.

$$42 : 3 = (30 + 12) : 3 = 30 : 3 + 12 : 3 = 10 + 4 = 14.$$

Пример 4. Разделим 356 на 4.

$$356 : 4 = (320 + 36) : 4 = 80 + 9 = 89.$$

Такое деление записывают обычно короче — уголком (рис. 24).

	4	2	3				
—							
	3		1	4			
	1	2					
—							
	1	2					
		0					

		3	5	6	4		
—							
		3	2		8	9	
			3	6			
			3	6			
				0			

Рис. 24

Пример 5. Разделим 14 688 на 36 (рис. 25).

Число тысяч — 14 — меньше 36. Будем делить на 36 число сотен — 146. $146 : 36 = 4$ (остаток 2). Теперь необходимо разделить остаток от деления сотен — 2 сотни и десятки — 8 десятков, т. е. 28 десятков, на 36. $28 : 36 = 0$ (остаток 28). Остаётся разделить остаток от деления десятков (28) и единицы (8), т. е. 288 единиц, на 36. $288 : 36 = 8$. Таким образом,

$$14\,688 : 36 = 408.$$

Пример 6. Разделим 1409 на 7 (рис. 26).

Делим на 7 число сотен — 14. $14 : 7 = 2$ (остаток 0). Делим на 7 число десятков. $0 : 7 = 0$. Делим на 7 число единиц — 9. $9 : 7 = 1$ (остаток 2). Таким образом,

$$1409 : 7 = 201 \text{ (остаток 2)}.$$

Так как при делении натуральных чисел на 2 имеется два различных остатка, то множество всех натуральных чисел можно разбить на два класса, содержащих бесконечно много чисел. В первый класс включим все числа, имеющие остаток 0 при делении на 2. Вот первые 10 чисел этого класса:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.$$

Во второй класс включим все числа, имеющие при делении на 2 остаток 1. Вот первые 10 чисел этого класса:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.$$

Так как при делении натуральных чисел на 3 имеется три различных остатка, то множество всех натуральных чисел можно разбить на 3 класса. При делении на 3 числа первого класса имеют остаток 0, числа второго класса — остаток 1, числа третьего класса — остаток 2.

Очевидно, что получаемые таким образом классы чисел не имеют общих чисел — каждое натуральное число входит только в один класс.

	1	4	6	8	8	3	6	
—	1	4	4			4	0	8
			2	8				
				0				
			2	8	8			
			2	8	8			
					0			

Рис. 25

	1	4	0	9	7			
—	1	4			2	0	1	
			0					
			0					
				9				
				7				
				2				

Рис. 26

232. Приведите пример деления с остатком, назовите делимое, делитель, неполное частное, остаток.

233. Чему равен остаток при делении нацело?

234. Объясните, как выполнено деление:

$$\begin{array}{r} \text{а) } \underline{3222} \overline{)9} \\ \underline{27} \\ 52 \\ \underline{45} \\ 72 \\ \underline{72} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \underline{2187} \overline{)26} \\ \underline{208} \\ 107 \\ \underline{104} \\ 3 \text{ (ост.)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } \underline{146376} \overline{)321} \\ \underline{1284} \\ 1797 \\ \underline{1605} \\ 1926 \\ \underline{1926} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{г) } \underline{16100} \overline{)46} \\ \underline{138} \\ 230 \\ \underline{230} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{д) } \underline{14084} \overline{)28} \\ \underline{140} \\ 8 \\ \underline{0} \\ 84 \\ \underline{84} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{е) } \underline{97963} \overline{)951} \\ \underline{951} \\ 286 \\ \underline{0} \\ 2863 \\ \underline{2853} \\ 10 \text{ (ост.)} \end{array}$$

235. Выполните деление:

- а) $261 : 7$; б) $1872 : 8$; в) $2144 : 6$;
г) $1742 : 13$; д) $3685 : 15$; е) $15\,216 : 16$.

236. Вычислите:

- а) $18\,147 : 23$; б) $18\,600 : 24$; в) $9576 : 21$;
г) $6278 : 51$; д) $32\,614 : 46$; е) $46\,066 : 57$.

237. Найдите частное:

- а) 288 и 8; б) 738 и 9; в) 798 и 8;
г) 9899 и 99; д) 3778 и 47; е) 3450 и 75.

Выполните деление (**238–241**).

- 238.** а) $9331 : 31$; б) $37\,324 : 62$; в) $20\,558 : 51$;
г) $560 : 80$; д) $900 : 30$; е) $7200 : 900$;
ж) $24\,000 : 800$; з) $5400 : 600$; и) $6300 : 700$.

- 239.** а) $8100 : 90$; б) $2700 : 90$; в) $48\,000 : 80$;
г) $9600 : 30$; д) $14\,400 : 80$; е) $1380 : 60$.

- 240.** а) $5180 : 140$; б) $28\,600 : 520$; в) $129\,600 : 320$;
г) $263\,900 : 1300$; д) $54\,720 : 90$; е) $192\,290 : 670$.

- 241.** а) $123\,123 : 123$; б) $98\,532 : 322$; в) $140\,751 : 351$;
г) $17\,145 : 135$; д) $67\,176 : 311$; е) $80\,772 : 381$;
ж) $56\,088 : 456$; з) $114\,103 : 943$; и) $101\,952 : 236$.

- 242.** Выполните деление с остатком:
 а) $49 : 8$; б) $73 : 8$; в) $58 : 7$; г) $118 : 23$;
 д) $400 : 57$; е) $487 : 17$; ж) $456 : 6$; з) $683 : 5$.
- 243.** Какие остатки получаются при делении натуральных чисел:
 а) на 2; б) на 3; в) на 4; г) на 7?
- 244.** Какой наибольший остаток может получиться при делении натуральных чисел:
 а) на 2; б) на 3; в) на 4; г) на 5?
- 245.** Какой наименьший остаток может получиться при делении натуральных чисел?
- 246.** Разбейте множество натуральных чисел на классы по остаткам от деления на 3; 4; 7. Выпишите первые десять чисел каждого класса.
- 247.** Ученик выполнил деление: $148 : 15 = 8$ (ост. 28). В чём заключается ошибка? Выполните деление правильно.
- 248.** На доске написано несколько примеров на деление с остатком. В каждом примере делимое стёрли и заменили буквой. Найдите делимое.
 а) $a : 12 = 3$ (ост. 2); б) $b : 26 = 7$ (ост. 4);
 в) $c : 18 = 5$ (ост. 2); г) $k : 48 = 5$ (ост. 8).
- 249.** Определите неполное частное:
 а) $76 : 12 = a$ (ост. 4); б) $12 : 26 = b$ (ост. 12);
 в) $808 : 35 = k$ (ост. 3); г) $442 : 29 = d$ (ост. 7).
- 250.** Определите делитель:
 а) $56 : a = 11$ (ост. 1); б) $93 : b = 2$ (ост. 3);
 в) $146 : c = 12$ (ост. 2); г) $228 : d = 3$ (ост. 3).
- 251.** Какой остаток получится от деления числа
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 1$
 на: а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 6; е) 7; ж) 8; з) 9; и) 10; к) 100?
- 252.** Проволоку длиной 3 м нужно разрезать на куски по 12 см. Сколько таких кусков получится?
- 253.** В классе 33 человека. Ребята построили в колонну по 4 человека в ряд. Сколько человек стоит в последнем (неполном) ряду?
- 254.** Класс построили в колонну по 4 человека в ряд. Получилось 8 полных и один неполный ряд из трёх человек. Сколько человек в классе?

255. В подъезде семнадцатизэтажного дома расположены квартиры с 1-й по 68-ю. На каком этаже расположена квартира 63?

256. Семь девочек играли в прятки. Они решили, что водить будет та из них, которая окажется 25-й при счёте по кругу. Вера начала счёт с себя: 1, 2, 3, ... Катя, не дожидаясь окончания счёта, сказала: «Водить буду я». Какой номер был у Кати в начале счёта?

257. Какое наименьшее число при делении и на 3, и на 5, и на 7 даёт в остатке: а) 0; б) 1; в) 2?



1.16. Числовые выражения

Число 4 можно записать в виде суммы $3 + 1$, разности $9 - 5$, произведения $2 \cdot 2$, частного $12 : 3$, степени 2^2 или другими способами:

$$12 : 2 - 2; 3 \cdot (12 - 11) + 1 \text{ и т. д.}$$

Запись, в которой используются только числа, знаки арифметических действий и скобки, называют **числовым выражением**.

Числовые выражения могут быть сложными. Их упрощение, т. е. постепенное выполнение действий и приведение числового выражения к наиболее простой форме — числу, нередко требует серьёзных усилий.

Для правильного упрощения числовых выражений мало знать правила выполнения отдельных действий. Нужно ещё знать порядок выполнения этих действий.

1) Если в числовом выражении требуется выполнить только сложение и вычитание или только умножение и деление, то эти действия выполняют по порядку слева направо.

Например, укажем порядок действий в двух выражениях:

$$\overset{1}{8} - \overset{2}{3} + \overset{3}{5} + 10 \quad \text{и} \quad \overset{1}{7} \cdot \overset{2}{8} : \overset{3}{2} : \overset{4}{4} \cdot 5.$$

2) Если в числовом выражении есть скобки, то сначала выполняют все действия в скобках, а потом за скобками.

Например: $(5 + 32) \cdot 8$ и $5 + (32 : 8)$.

Скобки, в которые заключено одно действие умножения или деления, принято для краткости опускать.

Например, вместо $5 + (32 \cdot 8)$ и $5 + (32 : 8)$ пишут $5 + 32 \cdot 8$ и $5 + 32 : 8$. Но первыми выполняют те действия, которые должны были стоять в скобках.

3) Если в числовом выражении требуется выполнить несколько арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление), то сначала выполняют умножение и деление (слева направо), а затем сложение и вычитание (слева направо).

Например: $15 + 48 : 6 - 3 \cdot 52 : 26 + 3$ и $7 \cdot 9 - 12 : 3 + 12 : 12$.

4) Если в числовом выражении есть степень с натуральным показателем, то сначала нужно записать её в виде числа и только после этого приступить к выполнению остальных действий.

Например: $6^2 - 5^2 + 10 : 5 = 36 - 25 + 10 : 5$.

Изменять принятый порядок действий можно только в тех случаях, когда это позволяют законы сложения и умножения.

Например: $48 \cdot 26 + 52 \cdot 26 = 26 \cdot (48 + 52)$.

Заметим, что последнее по порядку действие в числовом выражении определяет название числового выражения. Например, $48 : 6 + 2$ — сумма, $48 : (6 + 2)$ — частное.

Мы уже знаем, почему нельзя число делить на нуль. Про числовые выражения, которые содержат деление на нуль, говорят, что они не имеют смысла. Например, выражение $3 : (4 \cdot 5 - 20)$ не имеет смысла, так как $4 \cdot 5 - 20 = 0$.

258. Что называют числовым выражением?

259. По каким правилам упрощают числовые выражения, записанные без скобок?

260. Про какие числовые выражения говорят, что они не имеют смысла?

- 261.** Определите порядок действий:
 а) $3 \cdot 2 + 5 \cdot 7$; б) $3 \cdot 7 - 6 \cdot 3$; в) $5 \cdot (4 + 12)$; г) $20 : (10 - 6)$.
 Какое действие выполняется последним? Как называется результат последнего действия?

Замечание. В числовых выражениях вида $a + (b \cdot c)$, $a - (b \cdot c)$, $a + (b : c)$, $a - (b : c)$... принято опускать скобки, но подразумевать их. Таким образом, пишут:

$$\begin{aligned} a + (b \cdot c) &= a + b \cdot c, & a - (b \cdot c) &= a - b \cdot c, \\ a + (b : c) &= a + b : c, & a - (b : c) &= a - b : c. \end{aligned}$$

Например, пишут: $2 + 3 \cdot 5 = 2 + 15 = 17$; $12 - 8 : 2 = 12 - 4 = 8$.

- 262.** Упростите числовое выражение:

а) $17 + 73 - 59 + 90$; б) $3 \cdot 15 \cdot 4 : 9 : 20 \cdot 8$.

- 263.** Укажите порядок действий:

а) $53 \cdot 2 + 44$; б) $320 - 56 \cdot 2 + 120 : 6$;
 в) $48 : 16 + 13 \cdot 4$; г) $53 \cdot (2 + 44)$;
 д) $320 - (56 \cdot 2 + 120 : 6)$; е) $(48 : 6 + 13) \cdot 4$.

- 264.** Укажите порядок действий и упростите числовое выражение:

а) $28 \cdot 2 + 4$; б) $28 \cdot (2 + 4)$; в) $100 : 4 + 6$;
 г) $100 : (4 + 6)$; д) $320 - 64 : 8 + 16$; е) $(320 - 64) : 8 + 16$.

Вычислите (**265–267**).

- 265.** а) $320 - (64 : 8 + 16)$; б) $45 + 24 \cdot 5 - (59 - 9)$;
 в) $98 - 72 : 9 - (35 + 55) : 3$; г) $270 : (303 : 3 - 11) + 48$;
 д) $26 - (53 - 48) \cdot 4 - 4$; е) $48 - (31 - 15) \cdot 2 - 2$;
 ж) $66 - (65 - 47) : 6 + 3$; з) $54 : (13 - 10) \cdot 2 + 36$.

- 266.** а) $848 + 6 - 756 : (45 - 45 : 5)$; б) $48 : 4 + 1200 : (75 - 75 : 5)$;
 в) $9 + 252 : (108 : 18 - 5)$; г) $655 - 324 : (48 : 12 - 3)$.

- 267.** а) $48 \cdot 57 + 52 \cdot 57$; б) $123 \cdot 36 + 77 \cdot 36$;
 в) $145 : 5 + 455 : 5$; г) $333 : 9 + 666 : 9$;
 д) $6324 : 102 + 14\,076 : 102$; е) $2628 : 36 + 972 : 36$.

Прочитайте выражение, используя слова «сумма», «разность», «произведение», «частное», «квадрат числа», «куб числа» (**268–271**).

- 268.** а) $3 + 15$; б) $15 - 6$; в) $15 \cdot 3$;
 г) $15 : 3$; д) $(3 + 5)^2$; е) $(15 - 3)^2$;
 ж) $(15 \cdot 3)^2$; з) $(15 : 3)^2$; и) $3^2 + 5^2$;
 к) $8^2 + 9^2$; л) $9^2 - 7^2$; м) $10^2 - 2^2$.

- 269.** а) $45 : (5 + 4)$; б) $45 : 5 + 4$; в) $13 \cdot 12 - 11$;
 г) $13 \cdot (12 - 11)$; д) $18 \cdot (8 - 6 : 3)$; е) $18 \cdot 8 - 6 : 3$;
 ж) $18 \cdot (8 - 6) : 3$; з) $(18 \cdot 8 - 6) : 3$; и) $18 \cdot 8 + 6 : 3$.

- 270.** а) $a + b$; б) $a - b$; в) $a \cdot b$; г) $a : b$;
 д) $(a + b)^2$; е) $(a - b)^2$; ж) $(a + b)^3$; з) $(a - b)^3$;
 и) $(a \cdot b)^2$; к) $(a : b)^2$; л) $(a \cdot b)^3$; м) $(a : b)^3$;
 н) $a^2 + b^2$; о) $a^3 + b^3$; п) $a^2 - b^2$; р) $a^3 - b^3$,

где a и b — натуральные числа.

- 271.** а) $a : (b + c)$; б) $a : b + c$; в) $a \cdot b - c$;
 г) $a \cdot (b - c)$; д) $a \cdot (b - c : d)$; е) $a \cdot b - c : d$;
 ж) $a \cdot (b - c) : d$; з) $(a \cdot b - c) : d$; и) $a \cdot b + c : d$,

где a , b , c и d — натуральные числа.

272. Запишите и вычислите:

- | | | |
|------------------------------|-------------|-------------|
| а) сумму чисел: | 1) 49 и 51; | 2) 56 и 72; |
| б) разность чисел: | 1) 59 и 34; | 2) 66 и 42; |
| в) сумму квадратов чисел: | 1) 7 и 2; | 2) 9 и 7; |
| г) квадрат суммы чисел: | 1) 9 и 11; | 2) 6 и 7; |
| д) разность квадратов чисел: | 1) 5 и 4; | 2) 6 и 2; |
| е) квадрат разности чисел: | 1) 5 и 3; | 2) 6 и 4; |
| ж) сумму кубов чисел: | 1) 4 и 3; | 2) 5 и 2; |
| з) куб суммы чисел: | 1) 13 и 7; | 2) 5 и 6; |
| и) разность кубов чисел: | 1) 4 и 3; | 2) 5 и 1; |
| к) куб разности чисел: | 1) 49 и 46; | 2) 56 и 52. |

Вычислите (**273**, **274**).

- 273.** а) $(5 + 2)^2$; б) $(9 - 8)^3$; в) $5 + 2^2$;
 г) $5^2 + 2^2$; д) $9^2 - 8$; е) $9^2 - 8^2$.

- 274.** а) $(714 : 7 - 100)^4$; б) $(824 : 8 - 102)^4$;
 в) $(954 : 9 - 636 : 6)^3$; г) $(758 - 659)^2 : (38 + 61)^2$.

275. Используя четыре цифры 3, знаки арифметических действий и скобки, составьте числовое выражение, равное:

- а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5;
 ж) 6; з) 7; и) 8; к) 9; л) 10; м) 12.

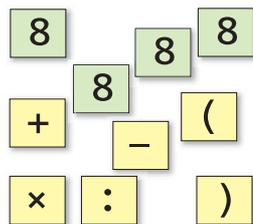
Решение.

а) $3 + 3 - (3 + 3) = 0$; б) $(3 + 3) : (3 + 3) = 1$.

Найдите другие решения для 0 и 1.

276. Используя четыре цифры 8, знаки арифметических действий и скобки, составьте числовое выражение, равное:

- а) 1; б) 2; в) 3;
 г) 4; д) 6; е) 7;
 ж) 8; з) 9; и) 10.



Если из первой коробки вынуть 6 карандашей, в ней станет столько же карандашей, сколько и во второй, а в двух вместе — в 2 раза больше, чем во второй:

1) $30 - 6 = 24$ (кар.).

Найдём число карандашей во второй коробке:

2) $24 : 2 = 12$ (кар.).

Теперь вернём 6 карандашей в первую коробку, т. е. найдём число карандашей в первой коробке:

3) $12 + 6 = 18$ (кар.).

Ответ: 18 и 12 карандашей.

- 281.** а) В двух пачках было 40 тетрадей. Когда из первой пачки взяли 10 тетрадей, то в двух пачках тетрадей стало поровну. Сколько тетрадей было во второй пачке первоначально?
б) В первой пачке было на 10 тетрадей больше, чем во второй, а всего 70 тетрадей. Сколько тетрадей было во второй пачке? Решите задачу, используя рисунок 27.

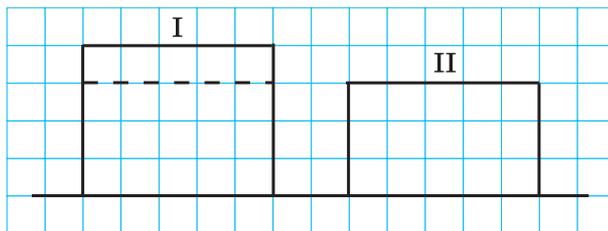


Рис. 27

- 282.** а) Мама дала сыну и дочери вместе 64 р. Дочери она дала на 4 р. больше, чем сыну. Сколько денег она дала каждому?
б) Саша собрал в саду на 5 кг яблок больше, чем Коля, а вместе они собрали 43 кг яблок. Сколько килограммов яблок собрал каждый?
- 283.** а) Брат с сестрой нашли в лесу 25 белых грибов. Брат помнит, что он нашёл на 7 грибов больше, чем его сестра. Сколько белых грибов нашёл каждый?
б) В классе 36 учащихся, причём девочек на 4 меньше, чем мальчиков. Сколько мальчиков и сколько девочек в классе?
- 284.** а) Сумма двух чисел 230. Если первое из них уменьшить на 20, то числа станут равными. Найдите эти числа.
б) Сумма двух чисел 350. Одно из них больше другого на 10. На сколько нужно уменьшить большее число, чтобы получились равные числа? Найдите эти числа.

- 285.** а) Сумма двух чисел 432, первое больше второго на 18. Найдите эти числа.
б) Сумма двух чисел 537, первое меньше второго на 131. Найдите эти числа.

- 286.** а) Сумма двух чисел равна 96, а разность равна 18. Найдите эти числа.
б) Сумма двух чисел равна 87, а разность равна 19. Найдите эти числа.
в) Сумма двух чисел равна 500, а разность равна 6. Найдите эти числа.



287. Из «Арифметики» Л. Н. Толстого.

- а) У двух мужиков 35 овец. У одного на 9 овец больше, чем у другого. Сколько у каждого овец?
б) У двух мужиков 40 овец, а у одного меньше против другого на 6. Сколько у каждого?
288. а) На двух полках книг было поровну. С первой полки переставили 10 книг на вторую полку. На сколько книг на второй полке стало больше, чем на первой?
б) В первой пачке на 30 тетрадей больше, чем во второй. Сколько тетрадей надо переложить из первой пачки во вторую, чтобы уравнивать число тетрадей в пачках?
в) Предположим, что у вас и у меня имеется одинаковая сумма денег. Сколько денег я должен вам дать, чтобы у вас стало на 10 рублей больше, чем у меня?

289. Бутылка масла весит 900 г. Масло на 100 г тяжелее бутылки. Сколько весит пустая бутылка?



290. На вопрос учеников о дне своего рождения учитель математики ответил загадкой: «Если сложить день и номер месяца моего рождения, то получится 20; если из дня рождения вычесть номер месяца рождения, то получится 14; если к произведению дня и номера месяца моего рождения прибавить 1900, то получится год моего рождения». Когда родился учитель математики?

Придумываем задачу

291. Придумайте задачу на нахождение двух чисел по их сумме и разности. Убедитесь, что числовые данные для задачи подобраны хорошо и она имеет решение. Прочитайте составленную вами задачу классу, и пусть кто-то её решит, а вы оцените это решение.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ 1

1 ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КАЛЬКУЛЯТОРА

В настоящее время широкое распространение для вычислений получили калькуляторы. Они позволяют практически мгновенно выполнять арифметические операции (действия).

На верхней панели калькулятора имеются клавиши:

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$, $\boxed{0}$ — для ввода чисел,

$\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$ — для указания арифметических операций,

$\boxed{=}$ — для вывода на табло результата вычислений;

\boxed{C} — для сброса (очистки) табло.

Вывести результат операции на табло можно нажатием любой из клавиш $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$ вместо клавиши $\boxed{=}$. Этим пользуются для упрощения вычислений. Если в процессе вычислений произошла ошибка, то нужно нажать клавишу \boxed{C} и повторить все вычисления сначала.

Примеры.

1) Вычислите сумму $12\,345 + 67\,890$.

Нажмите клавиши в следующем порядке:

$\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4} \boxed{5} \boxed{+} \boxed{6} \boxed{7} \boxed{8} \boxed{9} \boxed{0} \boxed{=}$

На табло, по мере нажатия клавиш, вы увидите первое слагаемое 12 345, затем второе слагаемое 67 890 и, наконец, результат 80 235.

Итак, $12\,345 + 67\,890 = 80\,235$.

Аналогично выполняются и другие арифметические операции.

2) Вычислите разность $7549 - 825$.

$\boxed{7} \boxed{5} \boxed{4} \boxed{9} \boxed{-} \boxed{8} \boxed{2} \boxed{5} \boxed{=}$

Ответ: 6724.

3) Вычислите произведение $48 \cdot 571$.

$\boxed{4} \boxed{8} \boxed{\times} \boxed{5} \boxed{7} \boxed{1} \boxed{=}$

Ответ: 27 408.

4) Вычислите частное $10\,148 : 236$.

$\boxed{1} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{4} \boxed{8} \boxed{\div} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{6} \boxed{=}$

Ответ: 43.

5) Вычислите $129 + 256 + 354$.

$\boxed{1} \boxed{2} \boxed{9} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{5} \boxed{6} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{5} \boxed{4} \boxed{=}$

Ответ: 739.



6) Вычислите $999 - 123 - 321$.

$$\boxed{9} \boxed{9} \boxed{9} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{=} \quad \text{Ответ: } 555.$$

Особого внимания требует порядок выполнения действий в числовых выражениях, в которых имеются (или подразумеваются) скобки.

7) Вычислите $9 \cdot 12 + 5$.

$$\boxed{9} \boxed{\times} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{5} \boxed{=} \quad \text{Ответ: } 113.$$

8) Вычислите $(9 + 12) \cdot 5$.

$$\boxed{9} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{\times} \boxed{5} \boxed{=} \quad \text{Ответ: } 105.$$

Заметим, что если примеры 7 и 8 записать так:

$$5 + 9 \cdot 12 \quad \text{и} \quad 5 \cdot (9 + 12),$$

то результат первого действия нужно вводить в «память» калькулятора или использовать клавиши $\boxed{(\quad)}$ и $\boxed{)\quad}$ для введения скобок, если это возможно на данном калькуляторе. Если такой возможности нет, то промежуточный результат надо запомнить или записать. Этих сложностей можно избежать, применив переместительный закон:

$$5 + 9 \cdot 12 = 9 \cdot 12 + 5 \quad (\text{см. пример } 7), \\ 5 \cdot (9 + 12) = (9 + 12) \cdot 5 \quad (\text{см. пример } 8).$$

Для вычитания и деления переместительный закон не выполняется, поэтому промежуточный результат надо запомнить (записать).

9) Вычислите $55 - 99 : 11$.

$$\boxed{9} \boxed{9} \boxed{\div} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{=} \quad (\text{результат: } 9 \text{ — запомнили})$$

$$\boxed{C} \boxed{5} \boxed{5} \boxed{-} \boxed{9} \boxed{=} \quad \text{Ответ: } 46.$$

10) Выполните задание 9, используя «память» калькулятора:

$$\boxed{9} \boxed{9} \boxed{\div} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{M+} \quad (\text{результат: } 9 \text{ — введён в «память»}).$$

$\boxed{C} \boxed{5} \boxed{5} \boxed{-} \boxed{MRC} \boxed{=} \quad (\text{нажатием клавиши } \boxed{MRC} \text{ число } 9 \text{ извлекается из «памяти»}).$

Вычислите с помощью калькулятора (**292**, **293**).

- 292.** а) $784 + 239$; б) $928 + 1075$;
в) $1985 + 999$; г) $9753 + 2468$;
д) $7499 - 4636$; е) $9284 - 3959$;
ж) $7548 - 3494$; з) $3763 - 2579$.

- 293.** а) $123 \cdot 321$; б) $509 \cdot 703$; в) $999 \cdot 999$;
 г) $755 \cdot 755$; д) $153\,117 : 159$; е) $88\,825 : 209$;
 ж) $252\,525 : 75$; з) $808\,707 : 101$; и) $161616 : 6734$.

Проверьте равенства калькулятором (**294**, **295**).

- 294.** а) $9735 + 7427 = 17\,162$; б) $808 \cdot 404 = 326\,432$;
 в) $808\,404 - 789\,789 = 18\,615$; г) $273\,429 : 369 = 741$.

- 295.**
- | | |
|--|---|
| $0 \cdot 9 + 1 = 1$ | $1 \cdot 8 + 1 = 9$ |
| $1 \cdot 9 + 2 = 11$ | $12 \cdot 8 + 2 = 98$ |
| $12 \cdot 9 + 3 = 111$ | $123 \cdot 8 + 3 = 987$ |
| $123 \cdot 9 + 4 = 1111$ | $1234 \cdot 8 + 4 = 9876$ |
| $1234 \cdot 9 + 5 = 11\,111$ | $12\,345 \cdot 8 + 5 = 98\,765$ |
| $12\,345 \cdot 9 + 6 = 111\,111$ | $123\,456 \cdot 8 + 6 = 987\,654$ |
| $123\,456 \cdot 9 + 7 = 1\,111\,111$ | $1\,234\,567 \cdot 8 + 7 = 9\,876\,543$ |
| $1\,234\,567 \cdot 9 + 8 = 11\,111\,111$ | $12\,345\,678 \cdot 8 + 8 = 98\,765\,432$ |

- 296.** Вычислите с помощью калькулятора:

а) $75^2 = 75 \cdot 75 = 5625$; 7 5 × 7 5 =

- б) 311^2 ; в) 25^2 ; г) 5^3 ; д) 12^3 ; е) 7^7 ; ж) 8^8 .

- 297.** У многих калькуляторов предусмотрено упрощение вычислений при возведении в степень:

$2^2 = 2 \cdot 2$; $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$; $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

2 × =

2 × = =

2 × = = =

Вычислите степень с помощью калькулятора:

- а) 2^5 ; б) 2^6 ; в) 2^7 ; г) 2^8 ; д) 2^9 ; е) 2^{10} ; ж) 3^{10} ; з) 33^5 .

2 ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ



У разных народов в разное время употреблялись различные системы счисления (нумерации). У первобытных народов не существовало развитой системы счисления. Ещё в XIX веке у многих племён Австралии и Полинезии было только два обозначения — для числа «один» и для числа «два». Эти обозначения они комбинировали. Число «три» они называли «два и один», число «четыре» — «два и два», число «пять» — «два, два и один», число «шесть» — «два, два и два». А числа, большие шести, они не различали и называли словом «много».

Египтяне за 3000 лет до н. э. применяли, в сущности, десятичную систему счисления. Единицу они обозначали знаком **I**, десяток — **∩**, сотню — **∪**. Число 345 записывалось так:



Десятичная система, которой широко пользуются в настоящее время во всём мире, более совершенна. Вместо палочек, взятых от одной до девяти, используют цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Для обозначения десятков, сотен и т. д. не нужны новые значки, так как те же цифры используют и для записи десятков, сотен и т. д. Одна и та же цифра имеет различные значения в зависимости от места (позиции), где она записана. Благодаря этому свойству современную систему счисления называют позиционной. Десятичная позиционная система счисления позволяет записывать сколь угодно большие натуральные числа.

Народы пришли к этой системе постепенно. Она зародилась в Индии в V веке. В IX веке ею уже владели арабы, в X веке она дошла до Испании, а в XII веке появилась в других странах Европы, но широкое распространение получила в XVI веке. Долгое время развитие позиционной системы счисления тормозилось отсутствием в ней числа и цифры ноль. Только после введения нуля система стала совершенной.

В России десятичная система счисления начала распространяться в XVII веке. В 1703 году был издан первый печатный учебник математики — «Арифметика» Л. Ф. Магницкого, в котором все вычисления велись в десятичной системе записи чисел.

До этого числа записывали буквами славянского алфавита. Числа от 1 до 9 записывали так:



Над одной или несколькими буквами ставили особый знак (титло), чтобы подчеркнуть, что полученная запись не буква, не слово, а число:

$\tilde{\Gamma} - 10, \tilde{\text{AI}} - 11, \tilde{\text{BI}} - 12, \dots, \tilde{\text{K}} - 20, \tilde{\text{KA}} - 21, \dots,$

$\tilde{\text{L}} - 30, \tilde{\text{M}} - 40, \dots, \tilde{\text{P}} - 100, \tilde{\text{PA}} - 101, \dots$

Интересно, что числа от 11 (один-на-десять) до 19 (девять-на-десять) записывали так же, как говорили, т. е. «цифру» единиц ставили до «цифры» десятков. Пример использования букв для обозначения чисел находим на циферблате часов кремля в Суздале.

В некоторых странах использовали системы счисления с другими основаниями — 5, 12, 20, 60. Например, древняя вавилонская система счисления была шестидесятеричная. Следы этой системы сохранились сейчас в единицах измерения времени:

1 ч = 60 мин, 1 мин = 60 с.



Примером непозиционной системы счисления без нуля может служить римская система. В ней числа записывают с помощью следующих цифр:

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

Если меньшая цифра стоит после большей, то она прибавляется к большей: XV = 15, XVI = 16. Если меньшая цифра стоит перед большей, то она вычитается из большей: IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, CM = 900. В других случаях правило вычитания не применяется. Числа от 1 до 21 обозначают так:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X,
XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII,
XVIII, XIX, XX, XXI.

Используя римскую систему счисления, запишем год выхода «Арифметики» Л. Ф. Магницкого — MDCCIII.

Это $1000 + 500 + 200 + 3 = 1703$ год.

Римскую систему нумерации используют и сейчас для обозначения веков, глав в книгах и т. п.

В электронно-вычислительных машинах используется двоичная система счисления, в которой всего две цифры: 0 и 1. Для примера запишем в двух системах числа от 0 до 9:

Десятичная система	Двоичная система
0	0
1	1
$2 = 2$	10
$3 = 2 + 1$	11
$4 = 2^2$	100
$5 = 2^2 + 1$	101
$6 = 2^2 + 2$	110
$7 = 2^2 + 2 + 1$	111
$8 = 2^3$	1000
$9 = 2^3 + 1$	1001

Таблицы сложения и умножения для однозначных чисел в двоичной системе счисления очень просты:

$$0 + 0 = 0; \quad 1 + 0 = 1; \quad 1 + 1 = 10; \quad 0 \cdot 0 = 0; \quad 1 \cdot 0 = 0; \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Вот несколько *примеров* на сложение, вычитание и умножение в двоичной системе:

$$1) \begin{array}{r} 101 \\ + 110 \\ \hline 1011 \end{array}$$

$$2) \begin{array}{r} 1111 \\ - 101 \\ \hline 1010 \end{array}$$

$$3) \begin{array}{r} 111 \\ \times 101 \\ \hline 111 \\ + 111 \\ \hline 100011 \end{array}$$

298. а) Прочитайте числа, записанные в римской системе нумерации:

I, II, IV, VII, IX, XI, XVII, MCMXCV.

б) Запишите в римской системе нумерации числа:

6, 8, 12, 18, 19, 20, 23, 24.

299. На одной из старых улиц Москвы стоят два дома, на фасадах которых обозначены даты их постройки:

MDCCCV и MDCCCLXXXIX.

В каком году построен каждый дом?

300. В предыдущем задании упростите запись чисел, учитывая, что четыре одинаковые цифры подряд обычно не пишут.

301. Первый магический квадрат был составлен в Китае в V—IV веке до н. э. Другой магический квадрат был составлен в Индии в I веке н. э. Сравните суммы чисел в строках, столбцах и диагоналях квадратов. В чём заключается магическое свойство этих квадратов?

4	9	2
3	5	7
8	1	6

302. В квадрате 3×3 расставьте числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, чтобы сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали была одинакова. Сначала определите, какой должна быть эта сумма.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

303. Докажите, что сумма всех чисел любого магического квадрата 3×3 делится на 3.

304. В Древней Индии умножали многозначные числа совсем не так, как мы это делаем теперь. Чтобы перемножить, например, 537 и 82, индусы рисовали прямоугольник со сторонами 3 и 2 клетки (по числу цифр в записи множителей), подписывали рядом с клетками прямоугольника цифры первого числа слева направо, цифры второго числа снизу вверх; клетки прямоугольника делили диагоналями (рис. 28). Затем перемножали попарно цифры множителей и результат записывали в соответствующую клетку таблицы так: цифру единиц писали вверху клетки, цифру десятков — внизу. После этого складывали полученные результаты вдоль диагоналей квадратов. Считать начинали с правого верхнего угла квадрата. Так получали цифры ответа по разрядам. В нашем примере:

единицы: 4

десятки: $6 + 1 + 6 = 13$ (3 пишем, 1 запоминаем)

сотни: $0 + 4 + 5 + 1 = 10$ (0 пишем, 1 запоминаем)

тысячи: $1 + 0 + 2 + 1 = 4$

десятки тысяч: 4

Ответ: $537 \cdot 82 = 44\,034$.

Проверим результаты обычным способом:

$$\begin{array}{r} \times 537 \\ \quad 82 \\ \hline + 1074 \\ \hline 4296 \\ \hline 44034 \end{array}$$

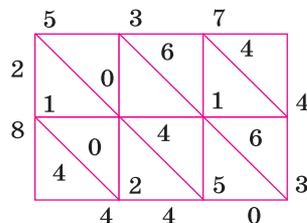


Рис. 28

- 305.** Вычислите произведение двух чисел индийским способом и сделайте проверку обычным способом:
 а) $38 \cdot 57$; б) $932 \cdot 43$; в) $34 \cdot 269$.
- 306.** Запишите в двоичной системе нумерации числовые выражения:
 а) 2^1 ; 2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; 2^5 ; 2^6 ; 2^7 ; 2^8 ; 2^9 ; 2^{10} ;
 б) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$;
 в) $2^5 + 1$; $2^6 + 1$; $2^7 + 1$; $2^8 + 1$; $2^9 + 1$; $2^{10} + 1$.
- 307.** Проверьте, что в двоичной системе нумерации справедливы равенства:
 а) $11 + 11 = 110$; б) $101 + 11 = 1000$;
 в) $101 - 11 = 10$; г) $100 - 11 = 1$;
 д) $101 \cdot 11 = 1111$; е) $11 \cdot 11 = 1001$;
 ж) $111 \cdot 11 = 10101$; з) $1011 \cdot 11 = 100001$.

3 АНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

- 308.** а) Тройка лошадей проскакала 90 км. Сколько километров проскакала каждая лошадь?



- б) Чтобы сварить яйцо всмятку, мама держит его 2 мин в кипящей воде. Сколько минут потребуется, чтобы сварить всмятку 8 яиц?
- 309.** а) К двузначному числу приписали цифру 5 сначала слева, а потом справа — получили два трёхзначных числа, сумма которых равна 912. Найдите двузначное число.
 б) К двузначному числу приписали цифру 1 сначала слева, а потом справа — получили два трёхзначных числа, сумма которых равна 926. Найдите двузначное число.
 в) К трёхзначному числу приписали цифру 2 сначала слева, а потом справа — получили два четырёхзначных числа, сумма которых равна 5929. Найдите трёхзначное число.
 г) К трёхзначному числу приписали цифру 7 сначала слева, а потом справа — получили два четырёхзначных числа, сумма которых равна 8360. Найдите трёхзначное число.

310. а) К двузначному числу приписали цифру 5 сначала слева, а потом справа — получили два трёхзначных числа, разность которых равна 234. Найдите двузначное число.

б) К двузначному числу приписали цифру 6 сначала слева, а потом справа — получили два трёхзначных числа, разность которых равна 162. Найдите двузначное число.

в) К трёхзначному числу приписали цифру 9 сначала слева, а потом справа — получили два четырёхзначных числа, разность которых равна 2214. Найдите трёхзначное число.

г) К трёхзначному числу приписали цифру 9 сначала слева, а потом справа — получили два четырёхзначных числа, разность которых равна 639. Найдите трёхзначное число.



Рис. 29

311. Автотурист отправился в путешествие на четырёхколёсном автомобиле с одним запасным колесом. По дороге он менял колёса с таким расчётом, чтобы каждое колесо проехало один и тот же путь. Определите:

а) Сколько километров проехало каждое колесо, если автомобиль проехал 4000 км?

б) Сколько километров проехал автомобиль, если каждое из пяти колёс проехало 4000 км?

312. На столе лежит девять спичек (рис. 29). Расположите их так, чтобы в каждом горизонтальном ряду было:

- а) по 4; б) по 6;
в) по 9; г) по 11.

313. Из спичек сложили шесть неверных равенств:

а) $XII + IX = II$ б) $IV - V = I$

в) $X = VII - III$ г) $X + X = I$

д) $VI - VI = XI$ е) $IV - I + V = II$

Переложите в каждом равенстве по одной спичке так, чтобы равенства стали верными.

314. Из спичек сложены верные равенства. Надо в каждом из равенств переложить одну спичку так, чтобы получились другие верные равенства.

а)

$$IX - V = IV$$

б)

$$VI + VI + VI = XVIII$$

в)

$$XI - VI = VII - II$$

г)

$$9 - 6 = 2 + 1$$

д)

$$3 + 3 = 6$$

е)

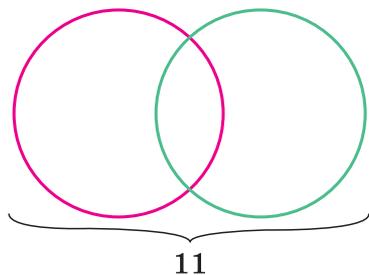
$$5 - 3 = 8 - 6$$

315. а) Гости спросили: сколько лет исполнилось каждой из трёх сестёр? Вера ответила, что ей и Наде вместе 28 лет, Наде и Любе вместе 23 года, а всем троим 38 лет. Сколько лет каждой из сестёр?

б) На XXII Олимпийских играх в Москве (1980 г.) спортсмены СССР получили 195 медалей, из них 126 золотых и бронзовых, 149 золотых и серебряных. Сколько золотых, серебряных и бронзовых медалей в отдельности получили спортсмены СССР?

316. а) В нашем классе коллекционируют только марки и монеты. Марки коллекционируют 8 человек, монеты — 5 человек. Всего коллекционеров 11. Объясните, как это может быть. Сколько человек коллекционируют только марки? Сколько — только монеты? (Решите задачу, используя рисунок 30.)

Марки — 8 Монеты — 5



б) Из 38 учащихся класса 24 занимаются в хоре и 15 в лыжной

Рис. 30

секции. Сколько учащихся занимаются и в хоре, и в лыжной секции, если в классе нет учащихся, не посещающих занятий хора или лыжной секции?

в) Из 35 учащихся класса 12 участвовали в конкурсе чтецов, 10 — в конкурсе на лучший рисунок, 4 принимали участие в обоих конкурсах. Сколько учащихся не участвовало ни в одном конкурсе?

г) В нашем классе 32 учащихся. Из них 23 любят кошек, 18 — собак. Причём 10 учащихся любят и кошек, и собак. Сколько учащихся нашего класса не любят ни кошек, ни собак?

д) В нашем классе 30 учащихся. На экскурсию в музей ходили 23 учащихся, в кино — 21, а 5 учащихся не ходили ни на экскурсию, ни в кино. Сколько учащихся нашего класса ходили и на экскурсию, и в кино?

е) В нашем классе 30 учащихся. На экскурсию в музей ходили 23 учащихся, в кино и в музей — 6, а 2 учащихся не ходили ни в кино, ни на экскурсию. Сколько учащихся нашего класса ходили в кино?

317. Два арбуза весят столько, сколько весят три дыни. Что тяжелее: один арбуз или одна дыня?

318. Из спичек сложили рака, который ползёт вверх (рис. 31). Переложите 3 спички так, чтобы он полз вниз.

319. Корова, выложенная из спичек, смотрит влево (рис. 32). Переложите две спички так, чтобы она смотрела вправо.

320. Спички сложены, как показано на рисунке 33. Переложите 2 спички так, чтобы получилось 5 равных квадратов.

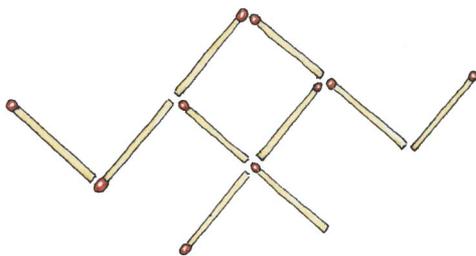


Рис. 31

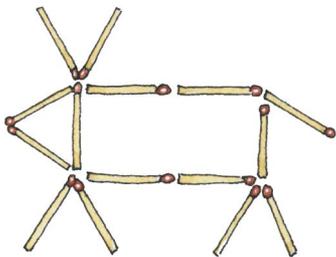


Рис. 32

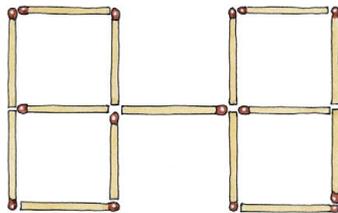


Рис. 33

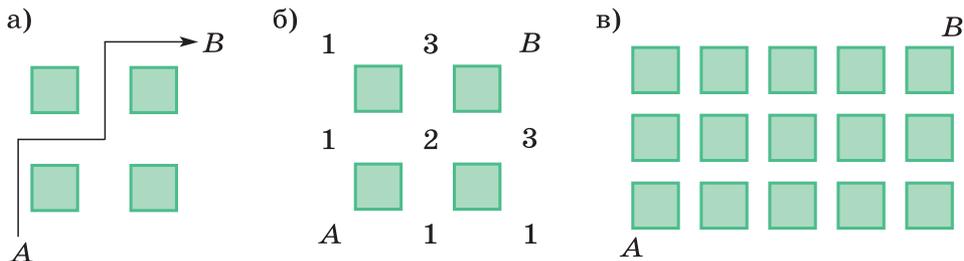


Рис. 34

321. Из точки A , показанной на схеме города, надо попасть в точку B , двигаясь только вправо и вверх. На рисунке 34, а показан один из маршрутов движения. Убедитесь, что это можно сделать только 6 способами.

Решение. Чтобы убедиться, что различных маршрутов движения от A к B только 6, можно их нарисовать по отдельности. Мы поступим проще. Укажем в каждой точке, в которой можно изменить направление движения, число способов, которыми можно прийти в эту точку (рис. 34, б). В точку B можно прийти $3 + 3 = 6$ способами.

322. Если мы захотим показать все маршруты движения (только вправо и вверх) из A в B (рис. 34, в), то придётся много потрудиться. Гораздо проще подсчитать их число описанным выше способом. Подсчитайте.

323. Коля написал два раза своё имя (рис. 35, а). Его сосед по парте заметил, что Коля может прочитать своё имя более чем 10 способами, и показал один из них (рис. 35, б). Сколькими способами Коля может прочитать своё имя?

324. На рисунке 36 показано, как можно прочитать слово «МАРШРУТ». Подсчитайте число всех способов, которыми можно прочитать это слово.



Рис. 35

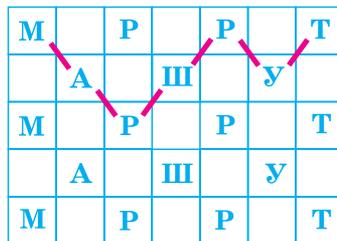


Рис. 36

ИССЛЕДУЕМ

325. Ученики выполняли задание, в котором требуется найти пропущенные числа:

	26	52
11		44

У них получились разные ответы:

1) <table border="1"><tr><td>26</td><td>26</td><td>52</td></tr><tr><td>11</td><td>33</td><td>44</td></tr></table>	26	26	52	11	33	44	2) <table border="1"><tr><td>19</td><td>26</td><td>52</td></tr><tr><td>11</td><td>18</td><td>44</td></tr></table>	19	26	52	11	18	44	3) <table border="1"><tr><td>2</td><td>26</td><td>52</td></tr><tr><td>11</td><td>25</td><td>44</td></tr></table>	2	26	52	11	25	44
26	26	52																		
11	33	44																		
19	26	52																		
11	18	44																		
2	26	52																		
11	25	44																		

Найдите правила, по которым ребята заполнили клетки, и придумайте ещё одно решение.

ДОКАЗЫВАЕМ

326. Докажите, что предыдущая задача имеет бесконечно много решений.

327. Имеются два сосуда вместимостью 8 л и 5 л. Как с помощью этих сосудов налить из водопроводного крана:

а) 3 л воды; б) 7 л воды?

328. Из нескольких монет только одна фальшивая — она легче остальных. Как с помощью чашечных весов без гирь определить фальшивую монету:

а) за одно взвешивание, если монет 3;

б) за два взвешивания, если монет 9;

в) за три взвешивания, если монет 27?

329. Используя три цифры 5, знаки арифметических действий и скобки, составьте несколько выражений, имеющих различные значения.

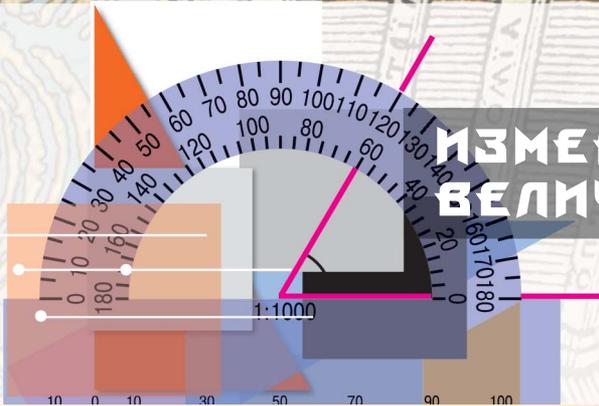
330. Верёвку разрезали на части. При этом сделали 6 разрезов. Сколько частей получилось?

331. Имеются брёвна по 4 м и 5 м. Сколько брёвен каждого вида надо распилить, чтобы получить 42 бревна по 1 м и сделать наименьшее число распилов?

- 332.** Требуется распилить бревно на 6 частей. Каждый распил занимает 1 мин 30 с. Сколько времени потребуется на эту работу?
- 333.** Лифт поднимается с первого этажа на третий за 6 с. За сколько секунд он поднимется с первого этажа на пятый?
- 334.** Сколькими способами можно уплатить без сдачи 28 рублей, имея монеты по 1 и 5 рублей?
- 335.** Сколькими способами можно разменять 50 рублей монетами в 1 и 5 рублей?



- *336.** Однажды Чёрт предложил Бездельнику заработать. — Как только ты перейдёшь через этот мост, — сказал он, — так твои деньги удвоятся. Можешь переходить по нему сколько хочешь раз, но после каждого перехода отдавай мне за это 24 копейки. Бездельник согласился и... после третьего перехода остался без гроша. Сколько денег было у него сначала?
- *337.** Три брата получили 24 яблока, причём младшему досталось меньше всех. Видя это, младший брат предложил такой обмен яблоками: «Я оставлю себе половину имеющихся у меня яблок, а остальные разделю между вами поровну. После этого пусть средний брат, а за ним старший поступят так же». Братья согласились. В результате у всех яблок стало поровну. Сколько яблок было у каждого первоначально?
- *338.** Однажды умный бедняк попросил у скупого богача приюта на две недели, причём сказал: «За это я тебе в первый день заплачу 1 р., во второй день — 2 р., в третий день — 3 р. и т. д. Словом, каждый день я буду прибавлять тебе по одному рублю, так что за один только четырнадцатый (последний) день я заплачу 14 р. Ты же будешь мне подавать милостыню: в первый день копейку, во второй — 2 к., в третий день — 4 к. и т. д., увеличивая каждый день свою милостыню вдвое». Богач с радостью согласился на такие условия, которые ему показались выгодными. Какой барыш принесла эта сделка богачу?

ИЗМЕРЕНИЕ
ВЕЛИЧИН

Изучая главу 2, вам предстоит повторить всё, что знаете о геометрических фигурах и их измерении, а также узнать много нового и интересного об углах, треугольниках и четырёхугольниках, окружностях и кругах, о равных фигурах. Решая геометрические задачи, вы будете встречать знакомые предметы окружающего вас мира, познакомитесь с различными единицами измерения величин, с формулами, знание которых поможет вам не только успешно учиться, но и решать практические задачи. Вам предстоит научиться решать текстовые задачи на движение в одном направлении и навстречу друг другу, а также на движение по реке.

Такие понятия, как длина, площадь, объём, масса, время, скорость и т. д., называют **величинами**. **Величина есть результат измерения**, она определяется числом, выраженным в некоторых единицах. Для обозначения величины пишут число, а рядом — название единицы. Например: 5 см, 10 кг, 12 км, 4 т, 5 мин.

Одна и та же величина в разных единицах выражается разными числами. Например:

$$5 \text{ см} = 50 \text{ мм}, \quad 1 \text{ ч} = 60 \text{ мин}, \quad 2 \text{ кг} = 2000 \text{ г}.$$

2.1. Прямая. Луч. Отрезок

Поверхность стола или поверхность воды в пруду (в безветренную погоду) может служить примером части **плоскости**.

Всю плоскость невозможно изобразить потому, что она бесконечна, но её можно представить себе.

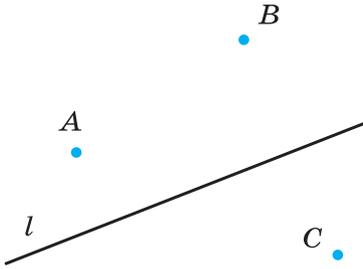


Рис. 37

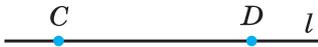


Рис. 38

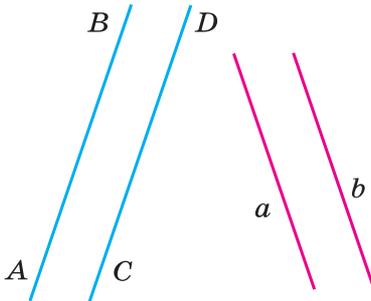


Рис. 39

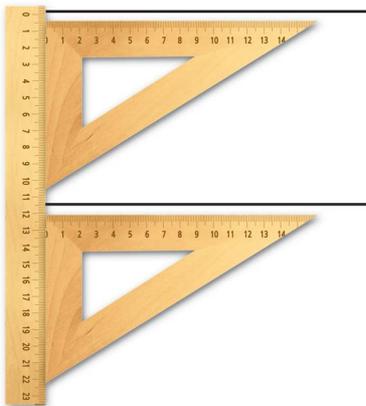


Рис. 40

Если согнуть лист бумаги, то линия сгиба будет частью прямой линии. Коротко — частью **прямой**.

Прямая не имеет ни начала, ни конца — она бесконечна. На рисунке всегда изображается только часть прямой, которую проводят с помощью линейки.

Прямую обозначают одной строчной (малой) латинской буквой, например l (рис. 37), и читают: «прямая эль». Точки обозначают заглавными (большими) латинскими буквами, например A, B, C (рис. 37).

Отметим на прямой l две различные точки C и D (рис. 38). Тогда эту прямую l называют также «прямая CD ».

Через любые две точки можно провести только одну прямую. Отсюда следует, что две различные прямые могут пересекаться только в одной точке.

Две различные прямые на плоскости могут и не пересекаться, сколько бы их ни продолжали. Такие прямые называют **параллельными**.

Если прямые AB и CD (или a и b) параллельны, то это обозначают так: $AB \parallel CD$ (или $a \parallel b$) (рис. 39).

На рисунке 40 показано, как с помощью угольника и линейки провести параллельные прямые.

Точка A , лежащая на прямой, делит её на две части (рис. 41). Каждую из этих частей называют **лучом** с началом в точке A .

Луч, так же как и прямую, обозначают двумя заглавными буквами. При этом на первом месте ставится буква, обозначающая начало луча, а на втором — буква, обозначающая какую-либо другую его точку: луч AB (рис. 42). Луч с началом в точке A (рис. 43) можно обозначить и AB , и AC .

Часть прямой, ограниченную точками A и B , называют **отрезком AB** . Точки A и B называют его концами (рис. 44). Отрезок с концами в точках A и B обозначают AB или BA .

Два отрезка AB и CD называют **равными отрезками**, если они совмещаются при наложении (рис. 45). Пишут: $AB = CD$. В частности, равны отрезки AB и BA .

339. Представление о плоскости даёт поверхность стола. Приведите другие примеры.

340. Представление о прямой даёт туго натянутая нить. Приведите другие примеры.

341. а) Можно ли в школьной тетради изобразить всю прямую?
 б) Сколько прямых можно провести через две разные точки?
 в) Как могут располагаться две прямые на плоскости?
 г) Какие прямые называют параллельными?
 д) Что называют лучом?
 е) Что называют отрезком?

342. Нарисуйте прямую, обозначьте её. Отметьте на ней точку, обозначьте её. Запишите обозначения прямой и полученных лучей.

343. Отметьте две точки. Проведите от руки прямую, проходящую через эти точки. Проверьте точность построения с помощью линейки.

344. На рисунке 46 найдите параллельные прямые. Проверьте с помощью линейки и угольника справедливость ваших утверждений.

345. Нарисуйте от руки параллельные прямые. Обозначьте их. Проверьте с помощью линейки и угольника точность построения.



Рис. 41



Рис. 42

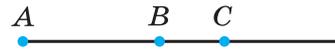


Рис. 43



Рис. 44

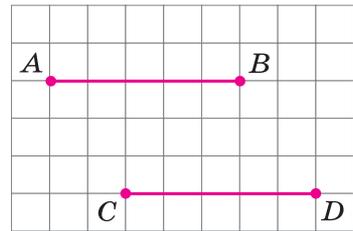


Рис. 45

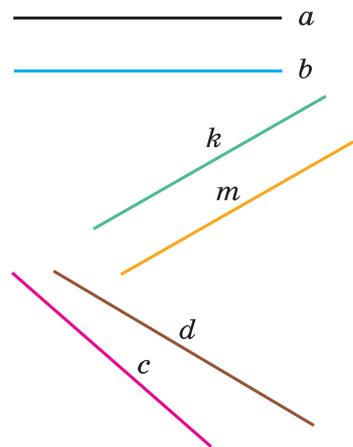


Рис. 46

- 346.** Проведите прямую AB и вне её точку C . Через точку C проведите прямую, параллельную прямой AB .
- 347.** Сколько прямых можно провести через одну точку?
- 348.** Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Через каждые две точки проведена прямая. Сколько прямых проведено?
- 349.** Даны четыре точки так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проведена прямая. Сколько прямых проведено?
- 350.** На сколько частей прямая делит плоскость?
- 351.** На сколько частей делят плоскость две прямые, если они:
а) пересекаются; б) параллельны?
- 352.** На сколько частей можно разделить плоскость тремя прямыми?
- 353.** Отметьте на листе бумаги точку, проведите несколько лучей с началом в этой точке. Сколько таких лучей можно провести?
- 354.** Отметьте на прямой две точки A и B . Сколько получилось лучей с началом в этих точках?
- 355.** Сколько получится лучей, если на прямой отметить:
а) 3 точки; б) 5 точек; в) 100 точек?

- 356.** Две прямые пересекаются в одной точке. Сколько лучей с началом в этой точке они образуют?



Рис. 47

- 357.** Назовите все лучи с вершиной в точках A , B и C (рис. 47). Сколько лучей получилось?

- 358.** Назовите все отрезки с концами в точках M , N и K (рис. 48). Сколько отрезков получилось?



Рис. 48

- 359.** На прямой отметили четыре точки. Образовалось 6 отрезков с концами в этих точках. Проверьте.

- 360.** Перечертите рисунок 49 в тетрадь. Обозначьте все точки пересечения прямых, продолжив их, если нужно. На сколько частей разделилась плоскость? Выберите правильный ответ.

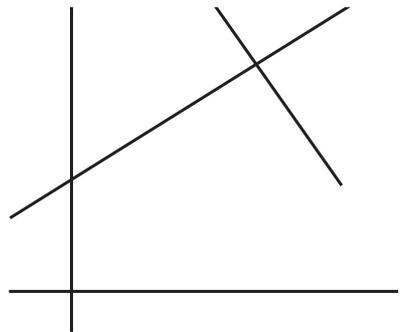


Рис. 49

- А. 10 частей
Б. 11 частей
В. 12 частей

2.2. Измерение отрезков

Ученик 5 класса и его сестра-десятиклассница подсчитали число шагов от школы до дома. Получилось, что одно и то же расстояние равно 300 шагам брата и 250 шагам сестры. Очевидно, что разные результаты получились из-за того, что сестра измеряла расстояние большими шагами, чем брат. В таких случаях говорят, что были использованы различные **единицы измерения длины**.

Отрезок, длина которого принята за единицу измерения, называют **единичным отрезком**.

С его помощью измеряют произвольные отрезки. Возьмём, например, отрезок длиной 1 см в качестве единичного. Тогда измерение удобно производить при помощи сантиметровой линейки.

Пусть задан отрезок AB , длину которого надо измерить. Приложим к нему шкалу сантиметровой линейки, совместив её нулевую точку 0 с концом отрезка A (рис. 50). Если при этом окажется, что точка B совпадает с делением шкалы — например, 5, то говорят, что длина отрезка AB равна 5 см, и пишут: $AB = 5$ см.

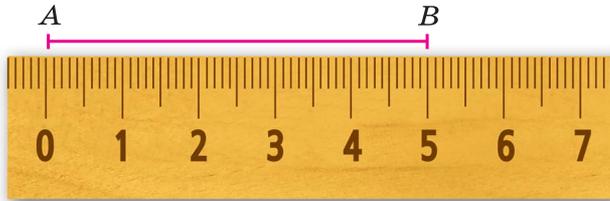


Рис. 50

Длину отрезка AB называют ещё **расстоянием между точками A и B** . Отметим, что два равных отрезка имеют равные длины.

Понятно, что всякий отрезок имеет определённую длину, но длина не всякого отрезка в точности равна целому числу сантиметров. Если, приложив шкалу сантиметровой линейки к отрезку AB так, что точка 0 совпадёт с точкой A , окажется, что точка B не совпадает с делением шкалы, то можно указать два деления, между которыми находится точка B , — например, 5 и 6 (рис. 51).



Рис. 51

В этом случае точная длина отрезка AB осталась неизвестной. Однако известно, что $5 \text{ см} < AB < 6 \text{ см}$, при этом величины 5 см и 6 см отличаются от AB не более чем на 1 см. Их называют приближениями или приближёнными значениями длины AB с точностью до 1 см и пишут: $AB \approx 5 \text{ см}$, $AB \approx 6 \text{ см}$.

Знак \approx называют знаком приближённого равенства и читают «приближённо равно».

В рассмотренном примере длина отрезка AB приближённо равна 5 см с недостатком и 6 см с избытком с точностью до 1 см.

Однако ещё можно получить приближённую длину отрезка с точностью до 1 см с округлением. Поясним эти слова.

Так как точка B расположена ближе к делению 6, то более точным приближением длины отрезка AB является 6 см. В таком случае говорят, что длина отрезка AB приближённо равна 6 см с округлением с точностью до 1 см.

Если же точка B оказалась бы ближе к делению 5, то мы сказали бы, что длина отрезка AB приближённо равна 5 см с округлением с точностью до 1 см.

Остаётся ещё третий случай, когда точка B оказалась точно посередине между делениями линейки 5 и 6. В этом случае условились считать, что 6 см есть приближённая длина отрезка AB с точностью до 1 см с округлением.

361. В тетради постройте три отрезка различной длины. С помощью циркуля и линейки постройте отрезки, им равные.

362. В тетради постройте отрезок. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок:

- а) в 2 раза больший первого;
- б) в 3 раза больший первого.

363. Как называют отрезок, длина которого принята за единицу измерения?

364. Что называют расстоянием между двумя точками?

365. Постройте отрезки длиной 7 см, 11 см 4 мм, 14 см 6 мм.

366. С помощью линейки постройте отрезок, длина которого равна:
а) сумме длин отрезков, изображённых на рисунке 52;
б) разности длин отрезков, изображённых на рисунке 52.

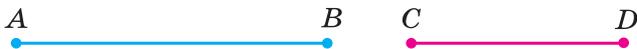


Рис. 52

367. Точка C расположена на прямой между точками A и B . Длина отрезка AC равна 8 см, длина отрезка CB на 3 см больше длины отрезка AC . Найдите длину отрезка AB .

368. Точка A расположена на прямой между точками B и C . Длина отрезка CB на 3 см больше длины отрезка AC . Найдите длину отрезка AB .

369. На прямой даны точки A , B и C , причём $AB = 6$ см, $AC = 13$ см. Найдите длину отрезка BC , если:

а) точки B и C лежат по одну сторону от точки A ;

б) точки B и C лежат по разные стороны от точки A .

370. На прямой даны три точки A , B и C , причём $AB = 13$ см, $AC = 4$ см. Найдите длину отрезка BC . (Задача имеет два решения.)

371. На прямой даны три точки A , B и C , причём $AB = 83$ см, $AC = 97$ см. Найдите длину отрезка BC . Сколько решений имеет задача?

372. На луче AM отложили отрезки AB и AC , $AC = 89$ см. Найдите длину отрезка BC , если:

а) AB на 15 см длиннее AC ;

б) AB на 15 см короче AC .

373. Объясните на примере, как измерить длину отрезка с точностью до 1 см:

а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.

374. Измерьте длину и ширину тетради с точностью до 1 см:

а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.

375. Отметьте в тетради две точки. Определите на глаз расстояние между ними. Начертите отрезок с концами в этих точках и измерьте приближённо его длину.

376. С помощью линейки измерьте отрезки, изображённые на рисунке 53, с точностью до 1 см:

а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.



Рис. 53

377. Рейка длиной 147 см разрезана на 4 равные части. Какую длину имеет каждая часть с точностью до 1 см:

а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением?

2.3. Метрические единицы длины

В России и в большинстве стран мира за основную единицу длины принят метр (см. «Исторические сведения» на с. 130).

Для измерения малых отрезков пользуются долями метра: **дециметром, сантиметром и миллиметром.**

Метр состоит из 10 дециметров: $1 \text{ м} = 10 \text{ дм}$.

Дециметр состоит из 10 сантиметров: $1 \text{ дм} = 10 \text{ см}$.

Сантиметр состоит из 10 миллиметров: $1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$.

$$1 \text{ м} = 10 \text{ дм} = 100 \text{ см} = 1000 \text{ мм}.$$

Примеры:

1) $2358 \text{ мм} = 2 \text{ м } 3 \text{ дм } 5 \text{ см } 8 \text{ мм} = 2 \text{ м } 35 \text{ см } 8 \text{ мм}$.

2) $15 \text{ м } 48 \text{ см } 4 \text{ мм} = 15 \text{ м } 4 \text{ дм } 8 \text{ см } 4 \text{ мм} = 15 \text{ м } 484 \text{ мм}$.

Для измерения больших расстояний введена единица длины **километр**, равная 1000 метрам:

$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м}.$$

Очень большие расстояния — астрономические — выражают в виде степеней числа 10 или в виде произведения некоторого числа и степени числа 10. Например, радиус Солнца равен $700\,000 \text{ км} = 7 \cdot 10^5 \text{ км}$, а среднее расстояние от Земли до Солнца равно $150\,000\,000 \text{ км} = 15 \cdot 10^7 \text{ км}$.

Очень малые длины измеряют **микронами** и **микромикронами**:

$$1 \text{ мм} = 1000 \text{ микрон}, \quad 1 \text{ микрон} = 1000 \text{ микромикрон}.$$

При измерении ещё меньших длин указывают, какую часть микрона они составляют.

378. Как называют основную единицу длины?

379. Какие единицы длины используют для измерения небольших отрезков?

380. Какие единицы длины используют для измерения больших расстояний?

381. Рассмотрите таблицу и ответьте на вопросы:

1 мм	1 см	1 дм	1 м	10 м	100 м	1 км
------	------	------	-----	------	-------	------

а) Во сколько раз увеличиваются единицы длины при переходе слева направо на одну клетку?

б) Во сколько раз уменьшаются единицы длины при переходе справа налево на одну клетку?

в) Во сколько раз:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 1) 1 см больше 1 мм; | 2) 1 дм больше 1 мм; |
| 3) 1 м больше 1 мм; | 4) 10 м больше 1 мм; |
| 5) 100 м больше 1 мм; | 6) 1 км больше 1 мм; |
| 7) 1 дм больше 1 см; | 8) 1 м больше 1 см; |
| 9) 10 м больше 1 см; | 10) 100 м больше 1 см; |
| 11) 1 км больше 1 см; | 12) 1 м больше 1 дм; |
| 13) 10 м больше 1 дм; | 14) 100 м больше 1 дм; |
| 15) 1 км больше 1 дм; | 16) 1 км больше 1 м? |

382. Выразите в метрах:

- | | | |
|------------|-------------|---------------|
| а) 1 км; | б) 17 км; | в) 10 дм; |
| г) 270 дм; | д) 9700 см; | е) 27 000 мм. |

383. Выразите в дециметрах:

- | | | |
|-----------|-----------|-------------|
| а) 1 м; | б) 43 м; | в) 1 км; |
| г) 17 км; | д) 30 см; | е) 9700 см. |

384. Выразите в сантиметрах:

- | | | |
|-----------|-------------|---------------|
| а) 1 м; | б) 27 м; | в) 1 км; |
| г) 17 км; | д) 9700 мм; | е) 27 000 мм. |

385. Выразите в миллиметрах:

- | | | |
|------------|-----------|-----------|
| а) 9 см; | б) 27 см; | в) 10 дм; |
| г) 270 дм; | д) 1 м; | е) 17 м. |

386. Выполните упражнение по *образцу*:

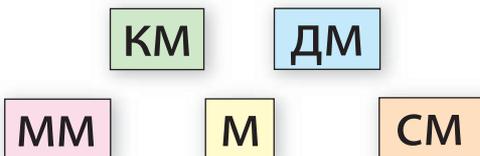
$$2308 \text{ мм} = 2 \text{ м } 3 \text{ дм } 0 \text{ см } 8 \text{ мм} = 2 \text{ м } 3 \text{ дм } 8 \text{ мм}.$$

- | | | |
|-------------|---------------|---------------|
| а) 1937 мм; | б) 2079 мм; | в) 12 938 мм; |
| г) 179 см; | д) 92 703 см; | е) 62 074 дм. |

387. Выполните упражнение по *образцу*:

$$2 \text{ м } 3 \text{ дм } 8 \text{ мм} = 2 \text{ м } 3 \text{ дм } 0 \text{ см } 8 \text{ мм} = 2308 \text{ мм}.$$

- а) 1 м 3 дм 8 см 4 мм;
б) 2 м 7 см 9 мм;
в) 23 м 7 дм 3 см 6 мм;
г) 4 м 7 дм 6 см;
д) 567 м 1 см;
е) 2 км 504 м 4 дм.



388. Данные величины запишите с точностью до 1 дм с недостатком; с избытком; с округлением по образцу:

6 дм 7 см \approx 6 дм с недостатком;
6 дм 7 см \approx 7 дм с избытком и с округлением.

- а) 7 дм 6 см; б) 8 дм 4 см; в) 3 дм 5 см;
г) 1 м 8 дм 3 см; д) 4 м 5 дм 6 см; е) 7 м 3 дм 5 см;
ж) 29 см; з) 41 см; и) 235 см.

389. Туристы прошли 70 км за 4 дня. Определите, какое расстояние они проходили в день, если считать, что каждый день они проходили одно и то же расстояние. Ответ выразите приближённо с точностью до 1 км:
а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.

ИЩЕМ ИНФОРМАЦИЮ

390. Найдите в учебнике, справочной литературе или Интернете ответы на следующие вопросы:

- а) Что означают приставки кило-, санти-, деци-, милли-?
б) Какие ещё приставки используют при измерении расстояний?
в) Что такое световой год? Где используют эту единицу?

2.4. Представление натуральных чисел на координатном луче

Числа удобно представлять точками прямой. Для этого задают луч, выходящий из точки O в направлении, отмеченном стрелкой, и отрезок, длину которого принимают за единицу. Этот отрезок называют **единичным отрезком**.

На луче от начальной точки O отложим один за другим несколько отрезков единичной длины (рис. 54). Будем считать, что точка O представляет число нуль, правый конец первого единичного отрезка — число 1, правый конец второго единичного отрезка — число 2 и т. д.

Мы построили координатный луч. С его помощью натуральные числа и нуль изображаются точками. Начальную точку O называют нулевой точкой или точкой 0 (нуль). Говорят ещё, что точка O

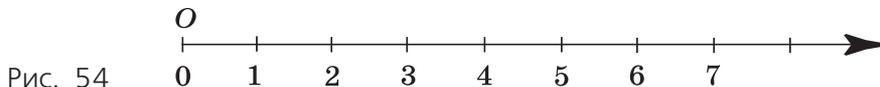


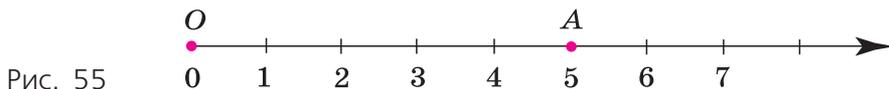
Рис. 54

имеет координату 0, и пишут $O(0)$. Следующие точки называют соответственно: точка 1, точка 2 и т. д.

Координатный луч напоминает линейку, на которой отмечены числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и т. д., с той лишь разницей, что любая линейка ограничена (конечна), а координатный луч неограничен (бесконечен).

Невозможно полностью изобразить бесконечный координатный луч, но можно себе его представить (вообразить). Поэтому на координатной оси можно изобразить только несколько первых натуральных чисел.

Произвольное натуральное число n изображается на координатном луче точкой, расстояние от которой до нулевой точки равно n единичным отрезкам. Эту точку называют точкой n или точкой с координатой n .



Например, на рисунке 55 отмечена точка A с координатой 5, пишут $A(5)$. Длина отрезка OA равна 5 единичным отрезкам. Обычно координатный луч располагают горизонтально и направляют от слева направо. В этом случае точка, имеющая большую координату, расположена на координатном луче правее. Поэтому натуральные числа можно сравнивать при помощи координатного луча по правилу:

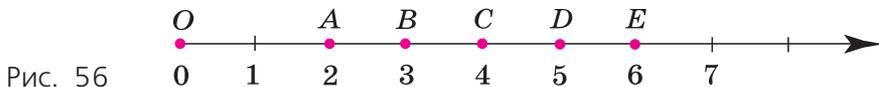
Из двух натуральных чисел больше то, которое на координатном луче находится правее.

391. Какой отрезок называют единичным?

392. Как построить координатный луч?

393. Как сравнивают натуральные числа при помощи координатного луча?

394. Дан координатный луч. Некоторые его точки обозначены буквами (рис. 56). Укажите координаты точек A , B , C , D и E . Найдите расстояние от этих точек до нулевой точки. Например, $A(2)$, $OA=2$.



395. Постройте координатный луч с единичным отрезком 1 см (2 клетки тетради). Отметьте точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Обозначьте точки с координатами 7, 5, 3, 1 соответственно буквами A , B , C и D .

396. Какая из точек $A(5)$, $B(100)$ и $C(56)$ расположена на координатном луче:

а) правее других; б) левее других?

397. Назовите три точки, расположенные на координатном луче правее точек с указанными координатами, и три точки, расположенные левее их:

а) 7; б) 13; в) 100; г) 998.

398. Сколько натуральных чисел можно отметить на координатном луче между точками с координатами:

а) 0 и 9; б) 4 и 14; в) 90 и 120?

399. На рисунке 57 изображён координатный луч. Назовите отмеченные на нём точки.

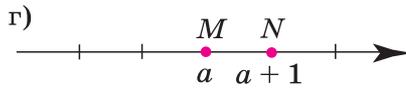
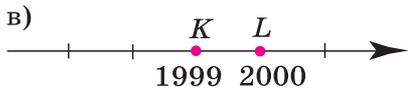
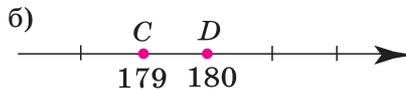
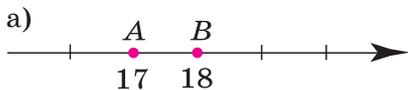


Рис. 57

400. По рисунку 58 определите координату точки A приближённо с точностью до 1:

а) с недостатком; б) с избытком.

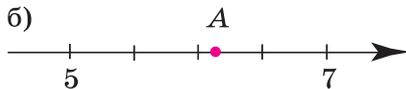
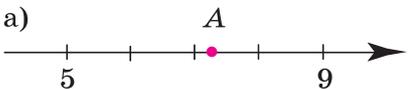


Рис. 58

401. Кузнечик прыгает вдоль координатного луча попеременно: на 5 единичных отрезков вправо и на 3 единичных отрезка влево. Сможет ли он за несколько прыжков из точки 0 попасть:

а) в точку 6; б) в точку 7?

2.5. Окружность и круг. Сфера и шар

Установим острие циркуля неподвижно в точке O , а ножку с карандашом будем свободно вращать, не меняя раствора циркуля. Карандаш начертит на плоскости замкнутую линию — **окружность** (рис. 59). Точку O называют **центром** окружности.

Отрезок, соединяющий центр окружности с любой её точкой, называют **радиусом**.

Его длину тоже называют радиусом. Все точки окружности удалены от её центра на одинаковое расстояние, равное радиусу. Можно также сказать, что окружность состоит из точек, удалённых от её центра на расстояние, равное радиусу.

Отрезок, соединяющий две любые точки окружности, называют **хордой**.

Хорду, проходящую через центр окружности, называют **диаметром**.

На рисунке 60 отрезки OL , OA , OB — радиусы окружности, AB — её диаметр, CD — хорда.

Две точки делят окружность на две части, называемые **дугами**. Обычно рассматривается одна из дуг окружности, определяемая по смыслу задачи.

Часть плоскости, состоящую из всех точек окружности и всех точек, лежащих внутри окружности, называют **кругом**.

На рисунке 61 изображён круг с центром O и радиусом OA . Круг состоит из точек, удалённых от данной точки на

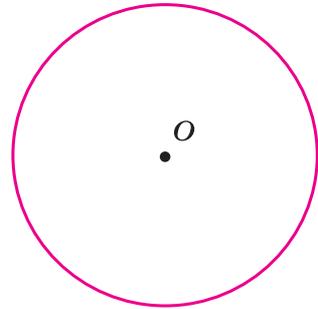


Рис. 59

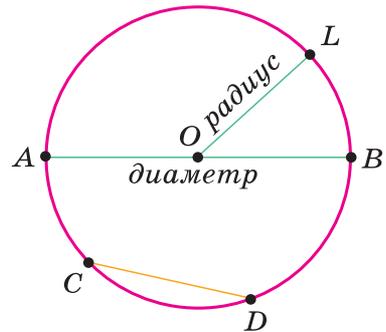


Рис. 60

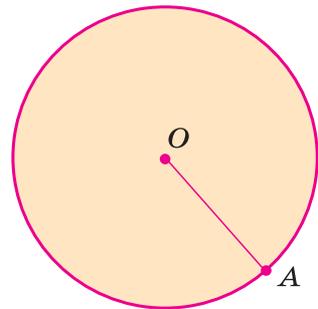


Рис. 61

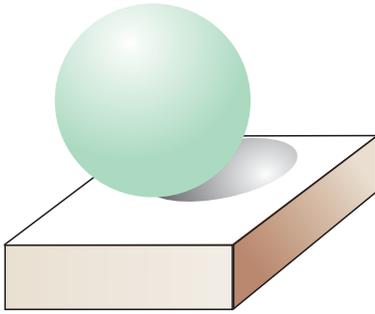


Рис. 62

расстояние, меньшее или равное его радиусу.

Все точки пространства, удалённые от данной точки (**центра**) на одно и то же расстояние, образуют **сферу**. Отрезок, соединяющий центр сферы с любой её точкой, называют **радиусом** сферы.

Часть пространства, состоящую из всех точек сферы и всех точек, находящихся внутри сферы, называют **шаром** (рис. 62). Все точки шара удалены от его центра на расстояние, меньшее или равное радиусу шара.

402. а) Назовите какой-нибудь предмет, имеющий форму окружности.
б) Назовите какой-нибудь предмет, имеющий форму круга.

403. Назовите центр, радиус, диаметр окружности, изображённой на рисунке 60.

404. а) Представление о сфере даёт теннисный мяч. Назовите какой-нибудь предмет, имеющий форму сферы.
б) Представление о шаре даёт арбуз. Назовите какой-нибудь предмет, имеющий форму шара.

405. *Задача-шутка.* На рисунке 63 изображён воздушный шарик. Как его было бы правильнее назвать — «шариком» или «сфериком»?

406. Начертите окружность, радиус которой равен:
а) 2 см; б) 5 см;
в) 7 см; г) 3 см 5 мм.

407. Какая из фигур, изображённых на рисунке 64, является окружностью? Какая — кругом?



Рис. 63

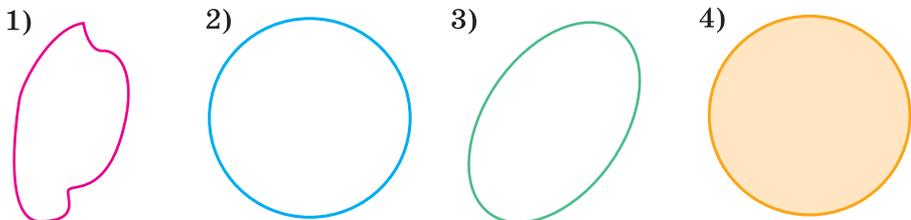


Рис. 64

408. Начертите окружность, радиус которой равен отрезку AB (рис. 65).



Рис. 65

409. На окружности с центром O и радиусом 2 см отметьте точку A . Постройте окружность с центром A и радиусом 2 см. Одну из точек пересечения окружностей обозначьте буквой B (рис. 66). С помощью циркуля от точки B отметьте дуги, равные дуге AB . Убедитесь, что конец шестой дуги, считая от точки A , совпадает с точкой A .

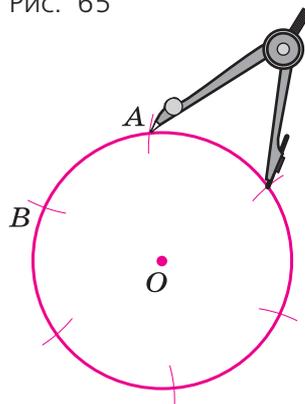


Рис. 66

410. С помощью циркуля выполните рисунок 67 на альбомном листе, раскрасьте его цветными карандашами или фломастерами.

Рис. 67

411. На рисунке 68 показан цветок, построенный с помощью циркуля.

а) Объясните, как этот рисунок получен из рисунка 67.

б) Придумайте свой рисунок цветка. Выполните его на альбомном листе и раскрасьте цветными карандашами или фломастерами.

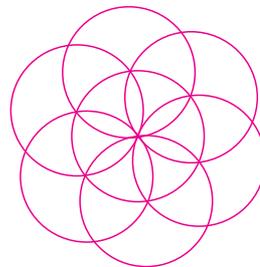


Рис. 67

412.

Внутри или вне окружности расположены точки, удалённые от её центра на расстояние: а) большее её радиуса; б) меньшее её радиуса?

413.

Расстояние между точками A и B равно 5 см. Постройте точку, удалённую от точки A на расстояние 4 см, а от точки B — на расстояние 3 см. Сколько таких точек можно построить?

414.

Внутри или вне сферы расположены точки, удалённые от её центра на расстояние: а) большее её радиуса; б) меньшее её радиуса?

415.

Дан отрезок AB . Постройте две окружности с центрами A и B и радиусом AB . Точки пересечения окружностей обозначьте буквами M и N . Постройте отрезки AM , AN , BM , BN . Равны ли отрезки AB , AM , AN , BM и BN ? Убедитесь, что прямая MN делит отрезок AB пополам.

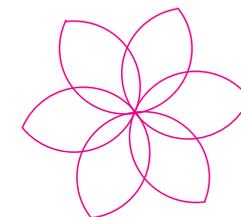


Рис. 68

416. На отрезке AB отметьте точку C .

а) Постройте две окружности: с центром A и радиусом AC и с центром B и радиусом CB . Построенные окружности имеют только одну общую точку C . Говорят, что они **касаются внешним образом**.

б) Постройте две окружности: с центром A и радиусом AB и с центром C и радиусом CB . Построенные окружности имеют только одну общую точку B . Говорят, что они **касаются внутренним образом**.

417. Постройте две окружности радиусами 3 см и 4 см, касающиеся:
а) внешним образом;

б) внутренним образом.

418. Постройте две окружности с центрами A и B и радиусами 3 см и 5 см, касающиеся внешним образом. Постройте третью окружность, центр которой лежит на отрезке AB и которая касается двух первых окружностей внутренним образом.

2.6. Углы. Измерение углов

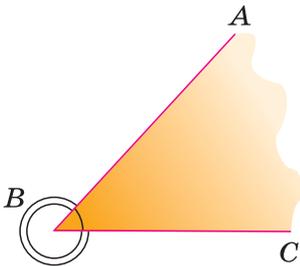


Рис. 69

На рисунке 69 изображены два различных луча BA и BC с общим началом B . Они делят плоскость на две части, называемые **углами**. Обычно рассматривают один из этих углов — его определяют по смыслу задачи и отмечают дугой или штриховкой. Угол ABC обозначают так: $\angle ABC$. Точку B называют **вершиной** угла, лучи BA и BC — его **сторонами**. Иногда для краткости угол обозначают одной буквой, обозначающей вершину угла. Тот же угол ABC обозначают так: $\angle B$.

Два угла называют **равными**, если они совмещаются при наложении.

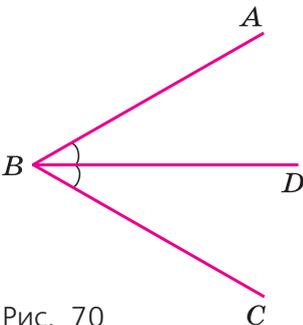


Рис. 70

На рисунке 70 изображены два угла: $\angle ABD$ и $\angle DBC$. Если лист бумаги перегнуть по прямой BD , то лучи BA и BC совпадут. Углы ABD и DBC равны. Пишут: $\angle ABD = \angle DBC$ — и говорят: «Угол ABD равен углу DBC ». Равные углы отмечают одинаковыми дугами.

Если на прямой отметить точку, то образуется два луча, выходящих из одной точки. Эти лучи тоже делят плоскость на две части, каждую из которых называют **развёрнутым углом**. На рисунке 71 изображён развёрнутый угол ABC . Перегнём лист бумаги так, чтобы лучи BA и BC совпали, и расправим лист. Тогда линия сгиба MN разделит каждый из развёрнутых углов на два равных угла, каждый из которых называют **прямым углом** (рис. 72).

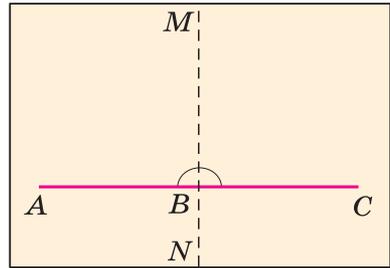


Рис. 71

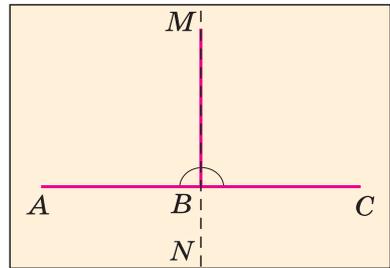


Рис. 72

Углы измеряют в градусах. Считается, что развёрнутый угол содержит 180 градусов. Его половина — прямой угол — содержит 90 градусов. Градус обозначают знаком «°». Пишут: $\angle ABC = 180^\circ$, $\angle ABM = 90^\circ$.

Для более точного измерения углов используют доли градуса: минуты «'» и секунды «''».

$$1^\circ = 60'; 1' = 60'', \text{ откуда } 1^\circ = 3600''.$$

Для измерения углов в градусах пользуются транспортиром. На рисунке 73 показано, как измеряют углы с помощью транспортира.

Транспортир используют также для построения углов с заданной градусной мерой. На рисунке 74 показано, как с помощью транспортира можно построить угол ABC , равный 60° .

Угол, меньший прямого, называют **острым**. Величина острого угла меньше 90° . Угол, больший прямого, но меньший развёр-

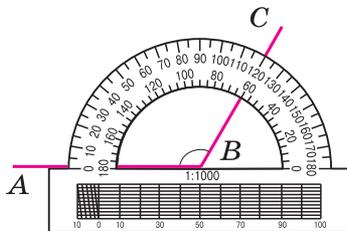
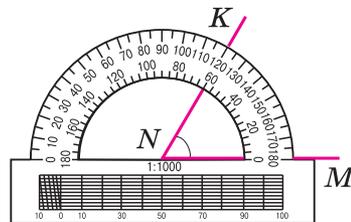


Рис. 73

$$\angle ABC = 120^\circ$$



$$\angle MNK = 60^\circ$$

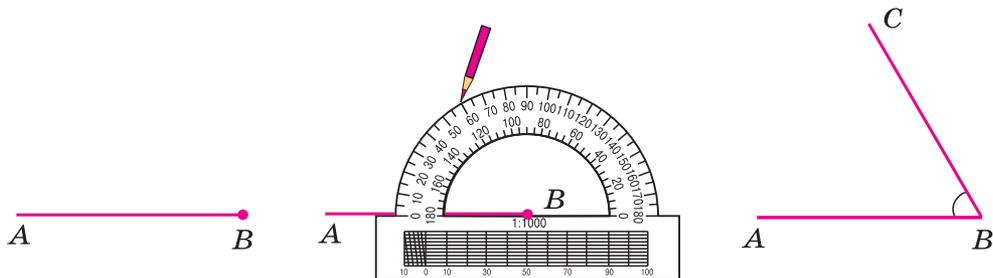


Рис. 74

нутаго, называют **тупым**. Величина тупого угла больше 90° , но меньше 180° .

На рисунке 75 показаны острый угол BAC и тупой угол $МОК$.

Прямые, пересекающиеся под прямым углом, называют **перпендикулярными**. На рисунке 72 прямая MN перпендикулярна прямой AC . Пишут: $MN \perp AC$.

Отметим, что на рисунке 72 изображены 4 прямых угла: $\angle ABM = \angle CBM = \angle CBN = \angle ABN = 90^\circ$.

- 419.** Что называют углом, вершиной угла, сторонами угла?
- 420.** а) Какие углы называют равными?
б) Какой угол называют развёрнутым? прямым? острым? тупым?
- 421.** Сколько градусов содержит развёрнутый угол, прямой угол?
- 422.** Какие прямые называют перпендикулярными?
- 423.** На рисунке 76 изображены углы. Проверьте результаты измерения. Назовите острые, прямые и тупые углы.
- 424.** С помощью транспортира измерьте углы на рисунке 77 и сделайте в тетради соответствующие записи.
- 425.** С помощью транспортира постройте углы, равные: 90° ; 50° ; 30° ; 60° ; 100° ; 95° ; 105° ; 45° ; 135° ; 15° .

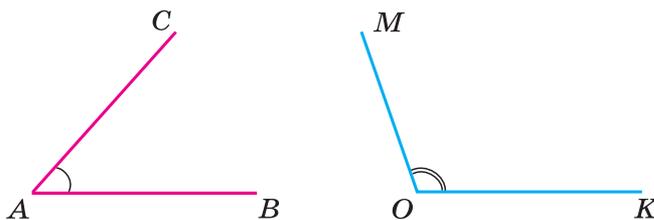


Рис. 75

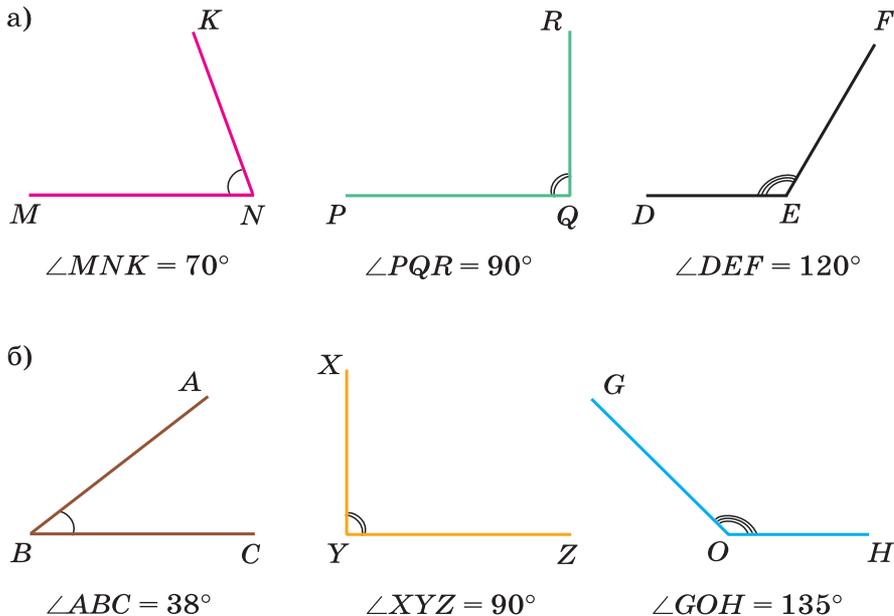


Рис. 76

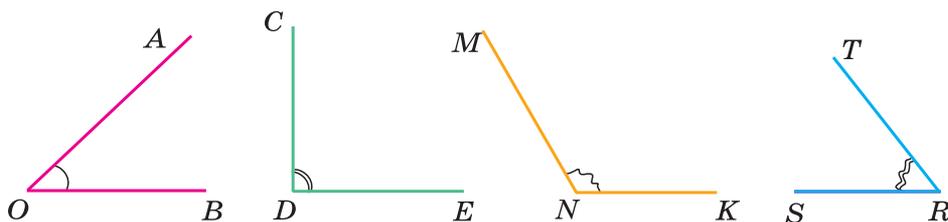


Рис. 77

426. Определите угол между направлениями (рис. 78):

- а) север и восток;
- б) север и юг;
- в) север и запад;
- г) запад и восток;
- д) северо-восток и восток;
- е) северо-восток и юго-восток;
- ж) северо-восток и юго-запад;
- з) северо-запад и восток.

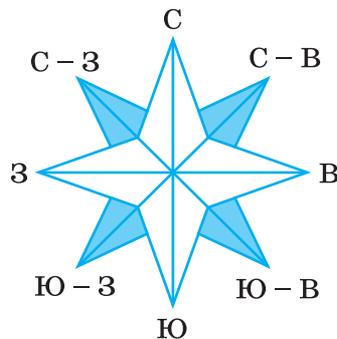


Рис. 78

- 427.** а) Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в: 6 ч; 3 ч; 1 ч; 5 ч?
 б) На какой угол повернётся часовая стрелка за: 6 ч; 3 ч; 1 ч; 4 ч?
 в) На какой угол повернётся минутная стрелка за: 30 мин; 15 мин; 10 мин; 1 мин?

428. Выразите в минутах: 1° ; 7° ; 10° ; 30° ; 90° ; 180° .

429. Выразите в секундах: $1'$; 1° ; $1^\circ 1'$; $4^\circ 3'$; 10° ; $10'$.

***430.** Выполните сложение по образцу:

$$4^\circ 7' 19'' + 1^\circ 52' 48'' = 5^\circ 59' 67'' = 5^\circ 60' 7'' = 6^\circ 7''.$$

- а) $37^\circ 12' + 5^\circ 7' 19''$; б) $49^\circ 33'' + 24^\circ 28''$;
 в) $5^\circ 27' + 3^\circ 56'$; г) $4^\circ 17' 29'' + 1^\circ 45' 38''$;
 д) $23^\circ 52'' + 8''$; е) $89^\circ 59' 59'' + 1''$.

***431.** Выполните вычитание по образцу:

$$4^\circ 17' 9'' - 3^\circ 29' 28'' = 4^\circ 16' 69'' - 3^\circ 29' 28'' = 3^\circ 76' 69'' - 3^\circ 29' 28'' = 47' 41''.$$

- а) $17^\circ - 29'$; б) $9^\circ 31' - 2^\circ 58'$;
 в) $5^\circ 47'' - 3^\circ 56''$; г) $4^\circ 37' 19'' - 3^\circ 39' 58''$;
 д) $23^\circ 5'' - 8''$; е) $1^\circ - 1''$;
 ж) $1^\circ - 1'$; з) $1^\circ - 59' 55''$.

432. а) На отрезке AB отметьте точки C и D . Сколько отрезков получилось?

б) Постройте острый угол AOB . Проведите внутри этого угла два луча OD и OE . Сколько острых углов получилось?

433. Внутри развёрнутого угла ABC проведите луч BD . Он разбивает развёрнутый угол на два угла ABD и DBC , которые называются **смежными** углами. Чему равна сумма величин смежных углов?

***434.** Луч OC делит развёрнутый угол AOB на два смежных угла AOC и BOC так, что угол AOC на 30° больше угла BOC . Найдите $\angle AOC$ и $\angle BOC$.

***435.** Луч OC делит развёрнутый угол AOB на два смежных угла AOC и BOC так, что угол AOC в 3 раза больше угла BOC . Найдите $\angle AOC$ и $\angle BOC$.

***436.** Могут ли смежные углы быть: а) оба прямые; б) оба острые; в) оба тупые?

437. Внутри развёрнутого угла AOB проведены два луча OD и OC так, что $\angle AOC = 130^\circ$, а $\angle DOB = 120^\circ$. Найдите $\angle DOC$.

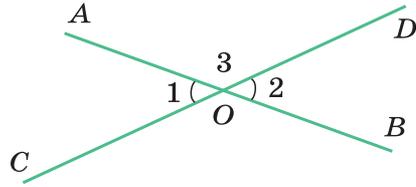


Рис. 79

438. Прямые AB и CD пересекаются в точке O (рис. 79). Углы AOC и BOD называют **вертикальными**. Назовите другую пару вертикальных углов. Чему равна сумма величин углов 1 и 3? Чему равна сумма величин углов 3 и 2? Верно ли, что $\angle 1 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 2$? Верно ли, что $\angle 1 = \angle 2$? Верно ли утверждение: **вертикальные углы равны**?

439. При пересечении двух прямых образовалось четыре угла. Определите величины этих углов, если один из них:
а) в 5 раз больше другого; б) на 40° больше другого.

Исследуем

440. **Касательной к окружности** называют прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку. Эту точку называют **точкой касания**. На рисунке 80 изображены окружность с центром O , касательная AB и радиус окружности OC . C — точка касания.

- Определите углы, образованные касательной и радиусом окружности, проведённым в точку касания.
- Покажите, как должны располагаться две окружности, чтобы они имели a общих касательных. Рассмотрите все возможные случаи: $a = 0, 1, 2, 3, 4$.

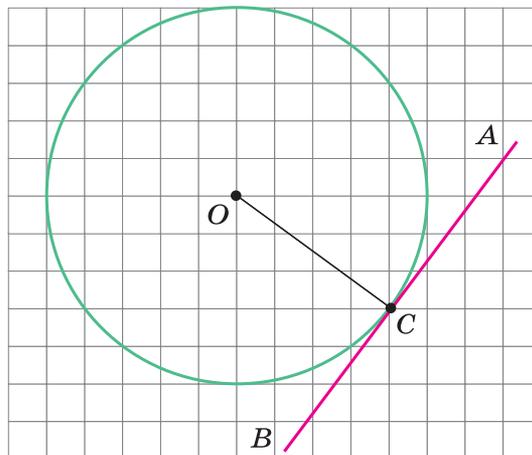


Рис. 80

2.7. Треугольники

Возьмём на плоскости три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой, и соединим их отрезками. Полученную фигуру называют **треугольником** (рис. 81). Точки A , B и C называют **вершинами**

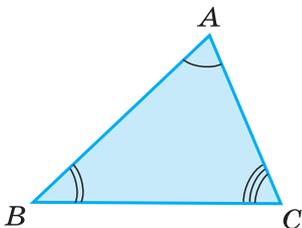


Рис. 81

углами **треугольника**. Углы A , B и C называют **углами** **треугольника**, отрезки AB , AC и BC — его **сторонами**. Треугольник с вершинами A , B и C обозначают так: $\triangle ABC$, читают: «треугольник ABC ». Заметим, что **треугольником** ABC называют как **линию**, составленную из отрезков AB , BC и AC , так и эту **линию** вместе с частью плоскости, расположенной **внутри** этой **линии**.

Если все углы треугольника острые, то его называют **остроугольным** **треугольником**.

Если один из углов треугольника прямой, то его называют **прямоугольным** **треугольником**.

Если один из углов треугольника тупой, то его называют **тупоугольным** **треугольником**.

В треугольнике не может быть больше одного прямого или тупого угла.

На рисунке 82 $\triangle ABC$ — остроугольный, $\triangle MNK$ — прямоугольный, $\triangle PQR$ — тупоугольный.

Если две стороны треугольника равны, то его называют **равнобедренным**, а если три стороны треугольника равны, то его называют **равносторонним**. Если все стороны треугольника имеют разные длины, то его называют **разносторонним**.

Сумму длин всех сторон треугольника называют его **периметром**.

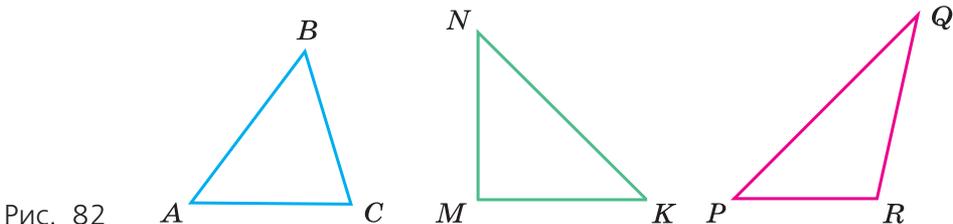


Рис. 82

Два треугольника называют **равными**, если их можно совместить при наложении. Например, на рисунке 83 треугольники ABC и MNK равны, так как они совмещаются при перегибании листа бумаги по прямой l .

На рисунке 84 показан порядок построения равнобедренного треугольника с основанием 3 см и боковой стороной 4 см с помощью циркуля и линейки.

Построить треугольник, длины сторон которого равны длинам заданных отрезков, можно в том случае, если длина каждого отрезка меньше суммы длин двух других отрезков.

Например, треугольник со сторонами 3 см, 4 см и 5 см построить можно, так как

$$3 \text{ см} < 4 \text{ см} + 5 \text{ см}, \quad 4 \text{ см} < 3 \text{ см} + 5 \text{ см}, \\ 5 \text{ см} < 4 \text{ см} + 3 \text{ см}.$$

А треугольник со сторонами 1 см, 2 см и 5 см построить нельзя, так как $5 \text{ см} > 1 \text{ см} + 2 \text{ см}$. Треугольник со сторонами 1 см, 2 см и 3 см тоже построить нельзя, так как $3 \text{ см} = 1 \text{ см} + 2 \text{ см}$.

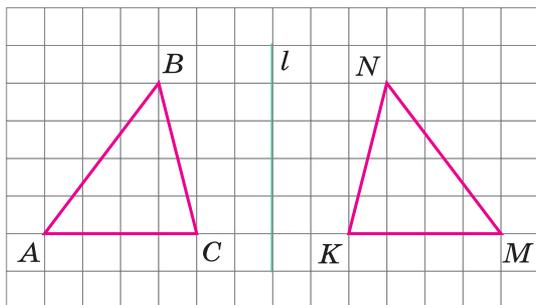


Рис. 83

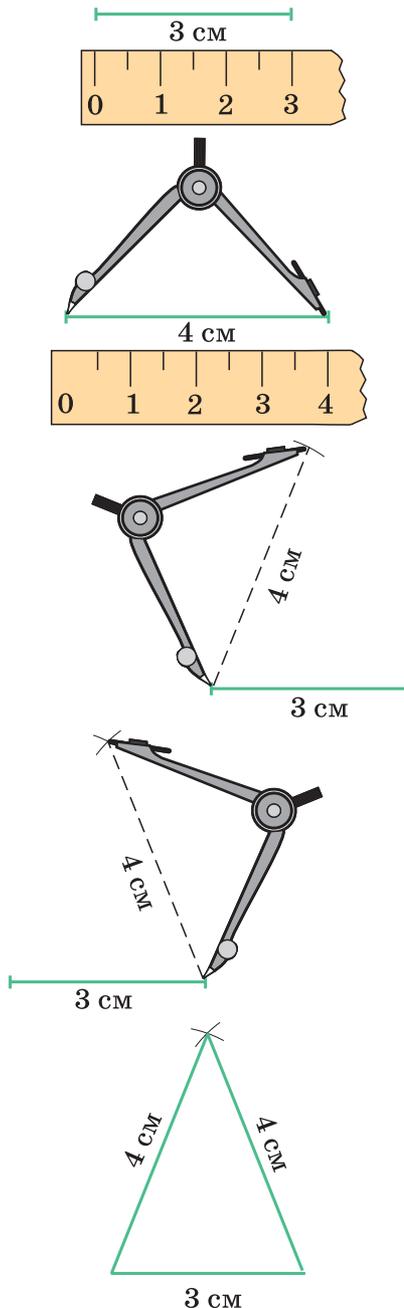


Рис. 84

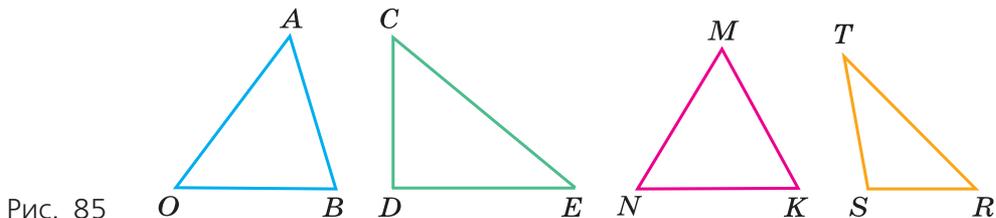


Рис. 85

- 441.** Какие виды треугольников вы знаете?
- 442.** Что такое периметр треугольника?
- 443.** Определите вид треугольника на рисунке 85.
- 444.** Постройте с помощью циркуля и линейки равнобедренный треугольник с основанием 4 см и боковой стороной 3 см. Сравните углы при основании построенного треугольника. Сделайте вывод.
- 445.** Постройте отрезок AB . Постройте равносторонний треугольник со стороной AB . Измерьте углы построенного треугольника. Сделайте вывод.
- 446.** Кузнечик прыгает на 5 единичных отрезков в любом направлении на плоскости. Сможет ли он за несколько прыжков из точки 0 координатного луча попасть в точку 4? Если сможет, то покажите, как кузнечик это сделает.
- 447.** Постройте треугольник:
- а) остроугольный;
 - б) прямоугольный;
 - в) тупоугольный;
 - г) равнобедренный;
 - д) равносторонний;
 - е) равнобедренный и остроугольный;
 - ж) равнобедренный и тупоугольный.
- 448.** Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник со сторонами 3 см, 4 см и 5 см. Измерьте его углы.
- 449.**
- а) Одна сторона треугольника равна 10 см, она на 2 см меньше второй стороны и на 3 см меньше третьей. Вычислите периметр этого треугольника.
 - б) Одна сторона треугольника равна 12 см, она на 4 см больше второй стороны и на 3 см больше третьей. Вычислите периметр этого треугольника.
 - в) Одна сторона треугольника равна 12 см, она на 3 см меньше второй стороны и на 2 см больше третьей. Вычислите периметр этого треугольника.
 - г) Одна сторона треугольника равна 25 см, она на 4 см больше второй стороны и на 5 см меньше третьей. Вычислите периметр этого треугольника.

450. а) Сторона равностороннего треугольника равна 7 см. Вычислите периметр этого треугольника.

б) Периметр равностороннего треугольника равен 27 см. Вычислите сторону этого треугольника.

***451.** В равнобедренном треугольнике даны длины двух сторон: 5 см и 6 см. Каким может быть периметр треугольника?

***452.** Периметр равнобедренного треугольника ABC равен 30 см, а одна из сторон на 3 см больше другой. Какими могут быть стороны треугольника ABC ?

?**453.** а) Верно ли, что если два треугольника равны, то их периметры равны?

б) Верно ли, что если периметры двух треугольников равны, то и сами треугольники равны?

2.8. Четырёхугольники

Возьмём на плоскости четыре точки A , B , C и D , такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой, и соединим их отрезками AB , BC , CD и DA (рис. 86—88). Если отрезки AB , BC , CD и DA не имеют других общих точек, кроме точек A , B , C и D , то полученную фигуру называют **четырёхугольником** $ABCD$. На рисунках 86 и 88 изображён четырёхугольник $ABCD$, а на рисунке 87 изображена фигура, не являющаяся четырёхугольником, в дальнейшем такие фигуры рассматриваться не будут.

Отрезки AB , BC , CD и DA называют **сторонами**, углы A , B , C и D — **углами**, а точки A , B , C и D — **вершинами** четырёхугольника $ABCD$.

Заметим, что четырёхугольником $ABCD$ называют как линию, составленную из отрезков AB , BC , CD и DA , так и эту линию вместе с частью плоскости, расположенной внутри этой линии.

Сумму длин сторон четырёхугольника называют его **периметром** и обозначают буквой P . Таким образом,

$$P = AB + BC + CD + DA.$$

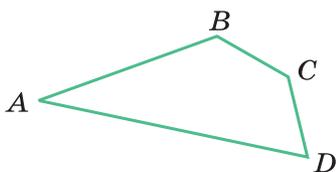


Рис. 86

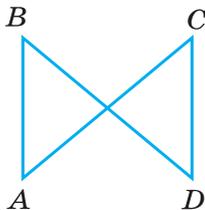


Рис. 87

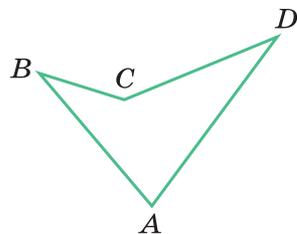


Рис. 88

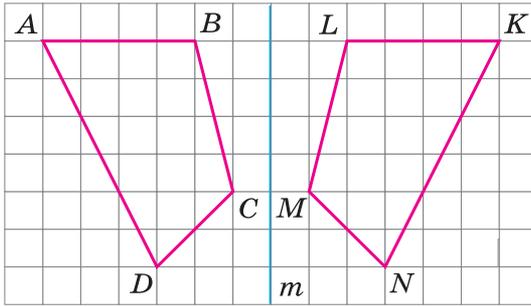


Рис. 89

Два четырёхугольника называют **равными**, если их можно совместить при наложении. Например, на рисунке 89 четырёхугольники $ABCD$ и $KLMN$ равны, так как они совмещаются при перегибании листа бумаги по прямой m .

Четырёхугольник, у которого все углы прямые, называют **прямоугольником**.

На рисунке 90 изображён прямоугольник $ABCD$. Точки A , B , C и D называют **вершинами** прямоугольника, а отрезки AB , BC , CD и AD — его **сторонами**. Нижнюю и верхнюю стороны прямоугольника называют ещё **основаниями** прямоугольника. Они **равны** и **параллельны**. Две другие стороны называют **высотами**, они тоже равны и параллельны.

Принято считать, что слово «сторона» означает не только отрезок, но и его длину.

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называют **квадратом**.

На рисунке 91 изображён квадрат $MNKL$.

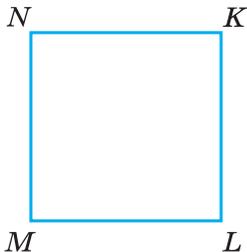


Рис. 91

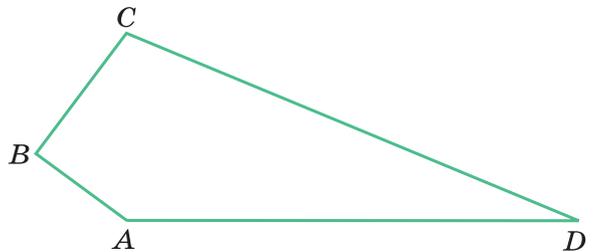


Рис. 92

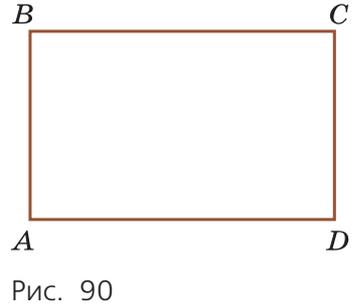


Рис. 90

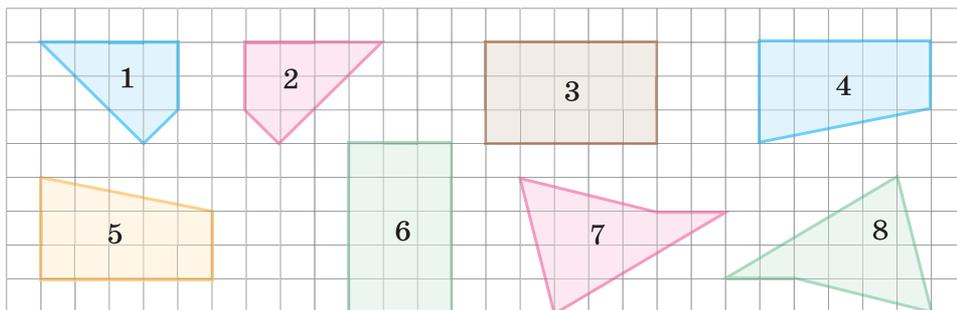


Рис. 93

454. Определите периметр четырёхугольника $ABCD$ (рис. 92).

455. Найдите на рисунке 93 равные четырёхугольники.

456. Постройте два равных четырёхугольника.

457. а) Верно ли, что если четырёхугольники равны, то равны и их периметры?

б) Верно ли, что если периметры двух четырёхугольников равны, то эти четырёхугольники равны?

458. Какой четырёхугольник называют прямоугольником?

459. а) Какой прямоугольник называют квадратом?

б) Является ли любой квадрат прямоугольником? Является ли любой прямоугольник квадратом?

460. Какой из четырёхугольников, изображённых на рисунке 94, является: а) прямоугольником; б) квадратом?

461. Постройте в тетради прямоугольник со сторонами:

а) 5 см и 3 см; б) 71 мм и 27 мм.

462. Постройте в тетради квадрат со стороной: а) 4 см; б) 34 мм.

463. Найдите периметр прямоугольника со сторонами:

а) 12 см и 9 см; б) 93 см и 2 см;

в) 11 см и 47 мм; г) 17 см и 3 дм.

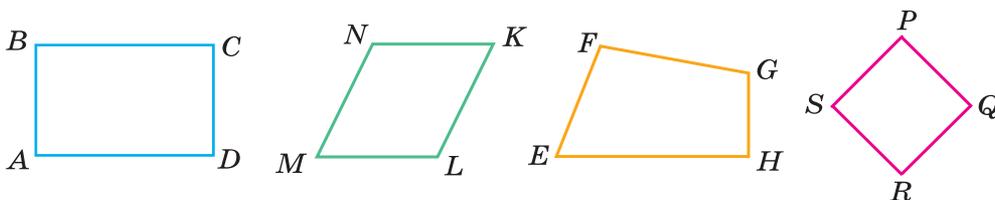


Рис. 94

- 464.** Составьте выражение для вычисления периметра прямоугольника со сторонами:
 а) 15 см и 32 см; б) 15 см и b см;
 в) a см и 32 см; г) a см и b см.
- 465.** Найдите периметр прямоугольника, если одна из его сторон равна 37 см, а другая:
 а) на 6 см больше; б) на 8 см меньше.
- 466.** Найдите периметр прямоугольника, если одна из его сторон равна 26 см, а другая:
 а) в 3 раза больше; б) в 2 раза меньше.
- 467.** Периметр прямоугольника равен 56 см, одна из его сторон равна 17 см. Найдите его другую сторону.
- 468.** а) Периметр прямоугольника равен 48 см, основание на 4 см больше высоты. Найдите высоту прямоугольника.
 б) Периметр прямоугольника равен 54 см, основание на 5 см больше высоты. Найдите бóльшую сторону прямоугольника.
 в) Периметр прямоугольника 36 дм, основание на 6 см больше высоты. Найдите стороны прямоугольника.
- 469.** Сторона квадрата равна 13 см. Найдите его периметр.

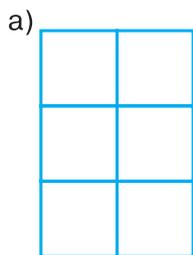


Рис. 95

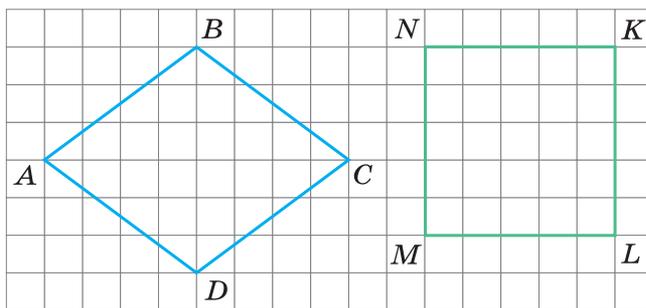


Рис. 96

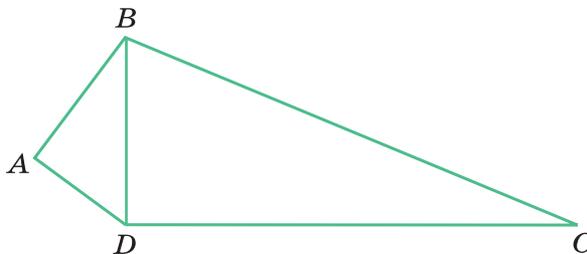


Рис. 97

- 470.** Стороны прямоугольника равны 16 см и 12 см. Найдите сторону квадрата, имеющего такой же периметр, что и данный прямоугольник.
- 471.** Сторону квадрата увеличили на 2 см. На сколько сантиметров увеличился периметр квадрата?
- 472.** Как изменится периметр квадрата, если его сторону:
а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 3 раза?
- 473.** Убедитесь, что на рисунке 95, а изображено 18 прямоугольников. Учтите, что квадрат является прямоугольником. Сколько прямоугольников изображено на рисунке 95, б?
- 474.** Четырёхугольник, все стороны которого равны, называют **ромбом**. На рисунке 96 изображены ромбы $ABCD$ и $MNKL$. Измерьте их стороны и вычислите периметры.
- 475.** а) Чему равен периметр ромба, если одна его сторона равна 20 см?
б) Чему равна сторона ромба, если его периметр равен 20 см?
-  **476.** Постройте ромб $KLMN$, если $KL = 4$ см, $\angle K = 60^\circ$. Измерьте длину отрезка LN и величину угла L .
-  **477.** Периметр треугольника ABD равен 12 см, периметр треугольника BDC — 30 см, а периметр четырёхугольника $ABCD$ — 32 см (рис. 97). Определите длину отрезка BD .

2.9. Площадь прямоугольника.

Единицы площади

Говорят, что

квадрат со стороной 1 м имеет площадь один квадратный метр (1 м^2),

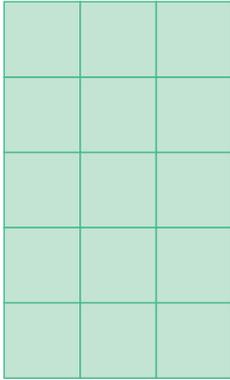
квадрат со стороной 1 дм имеет площадь один квадратный дециметр (1 дм^2),

квадрат со стороной 1 см имеет площадь один квадратный сантиметр (1 см^2),

квадрат со стороной 1 мм имеет площадь один квадратный миллиметр (1 мм^2),

квадрат со стороной 1 км имеет площадь один квадратный километр (1 км^2).

Вместо слов «единица измерения длины» часто говорят «линейная единица», а квадрат, сторона которого равна линейной единице, называют единичным квадратом. Говорят, что площадь единичного квадрата равна одной квадратной единице (1 м^2 , 1 дм^2 , ...).



$a = 3 \text{ см}$

$b = 5 \text{ см}$

Рис. 98

С помощью единичных квадратов измеряют площади прямоугольников.

Если прямоугольник можно разрезать на k единичных квадратов, то говорят, что он имеет площадь S , равную k квадратным единицам.

Например, на рисунке 98 изображён прямоугольник с основанием $a = 3 \text{ см}$ и высотой $b = 5 \text{ см}$. Его можно разрезать на 5 слоёв по 3 квадрата в каждом слое, т. е. на $5 \cdot 3 = 15$ единичных квадратов со стороной 1 см. Следовательно, его площадь S равна $5 \cdot 3 = 15 \text{ (см}^2\text{)}$.

Если основание и высота прямоугольника измерены одной линейной единицей и выражены натуральными числами a и b , то

площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту:

$$S = a \cdot b \text{ (квadratных единиц).}$$

Так как у квадрата все стороны равны, т. е. $a = b$, то

$$S = a \cdot a = a^2 \text{ (квadratных единиц), т. е.}$$

площадь квадрата равна второй степени его стороны.

Поэтому часто вторую степень числа называют **квадратом числа**. Так как $1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$, то

$$1 \text{ см}^2 = 10 \cdot 10 \text{ мм}^2 = 100 \text{ мм}^2.$$

Аналогично $1 \text{ дм}^2 = 10 \cdot 10 \text{ см}^2 = 100 \text{ см}^2$,

$$1 \text{ м}^2 = 10 \cdot 10 \text{ дм}^2 = 100 \text{ дм}^2,$$

$$1 \text{ км}^2 = 1000 \cdot 1000 \text{ м}^2 = 1\,000\,000 \text{ м}^2.$$

Используя степень числа 10, квадратный километр можно записать так:

$$1 \text{ км}^2 = 10^6 \text{ м}^2.$$

Для измерения площадей небольших земельных участков оказалось удобным ввести единицу измерения — **1 ар** (обозначают 1 а). Это площадь квадрата со стороной 10 м.

Так как $1 \text{ а} = 10 \cdot 10 \text{ м}^2 = 100 \text{ м}^2$, то эту единицу измерения площади часто называют **соткой**.

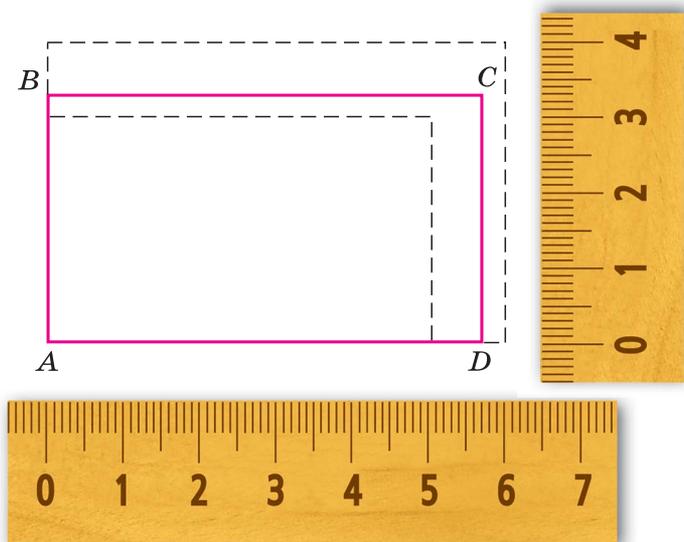


Рис. 99

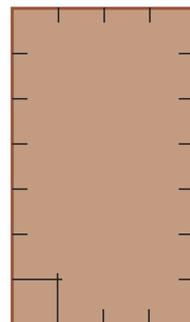


Рис. 100

Для измерения площадей более крупных земельных участков ввели единицу измерения — **1 гектар** (обозначают 1 га). Это площадь квадрата со стороной 100 м.

То есть $1 \text{ га} = 100 \cdot 100 \text{ м}^2 = 10\,000 \text{ м}^2$; $1 \text{ га} = 100 \text{ а}$.

Равные прямоугольники имеют равные площади.

При измерении площадей чаще всего используют приближённые значения величин. Например, пусть требуется найти площадь S прямоугольника $ABCD$ (рис. 99). Измерив его стороны AB и AD , получим $AB \approx 3 \text{ см}$ и $AD \approx 5 \text{ см}$ с недостатком, значит, площадь S прямоугольника $ABCD$ больше чем $3 \cdot 5 = 15 \text{ (см}^2\text{)}$, т. е. $S > 15 \text{ см}^2$.

Если взять длины сторон с избытком: $AB \approx 4 \text{ см}$, $AD \approx 6 \text{ см}$, то площадь прямоугольника $ABCD$ будет меньше чем $4 \cdot 6 = 24 \text{ (см}^2\text{)}$, т. е. $S < 24 \text{ см}^2$.

Таким образом, $15 \text{ см}^2 < S < 24 \text{ см}^2$.

- 478.** а) Какой квадрат называют единичным?
 б) Чему равна площадь прямоугольника?
 в) Чему равна площадь квадрата?
 г) Какие единицы измерения площади вы знаете?
- 479.** Определите, сколько единичных квадратов содержит прямоугольник на рисунке 100.

480. а) Определите площадь прямоугольника со сторонами 4 см и 5 см.

б) Определите площадь квадрата со стороной 6 см.

481. Рассмотрите таблицу и ответьте на вопросы:

1 мм	1 см	1 дм	1 м	10 м	100 м	1 км
1 мм ²	1 см ²	1 дм ²	1 м ²	1 а	1 га	1 км ²

а) Во сколько раз увеличиваются единицы площади, записанные во второй строке таблицы, при переходе слева направо на одну клетку?

б) Во сколько раз уменьшаются единицы площади, записанные во второй строке таблицы, при переходе справа налево на одну клетку?

в) Во сколько раз:

- | | |
|---|--|
| 1) 1 см ² больше 1 мм ² ; | 2) 1 дм ² больше 1 см ² ; |
| 3) 1 дм ² больше 1 мм ² ; | 4) 1 м ² больше 1 дм ² ; |
| 5) 1 м ² больше 1 см ² ; | 6) 1 м ² больше 1 мм ² ; |
| 7) 1 а больше 1 м ² ; | 8) 1 а больше 1 дм ² ; |
| 9) 1 а больше 1 см ² ; | 10) 1 га больше 1 а; |
| 11) 1 га больше 1 м ² ; | 12) 1 га больше 1 дм ² ; |
| 13) 1 км ² больше 1 га; | 14) 1 км ² больше 1 а; |
| 15) 1 км ² больше 1 м ² ; | 16) 1 км ² больше 1 дм ² ? |

482. Сложите величины:

а)
$$\begin{array}{r} 63 \text{ см}^2 \ 17 \text{ мм}^2 \\ + 32 \text{ см}^2 \ 90 \text{ мм}^2 \\ \hline \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} 3 \text{ м}^2 \ 76 \text{ дм}^2 \ 98 \text{ см}^2 \\ + 9 \text{ м}^2 \ 58 \text{ дм}^2 \ 43 \text{ см}^2 \\ \hline \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r} 45 \text{ га} \ 72 \text{ а} \\ + 56 \text{ га} \ 55 \text{ а} \\ \hline \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{r} 32 \text{ а} \ 74 \text{ м}^2 \ 21 \text{ дм}^2 \\ + 48 \text{ а} \ 62 \text{ м}^2 \ 83 \text{ дм}^2 \\ \hline \end{array}$$

483. Квадрат со стороной 1 м разрезали на квадраты со стороной 1 дм и сложили полученные квадраты в ряд. Какой длины получился ряд?

484. Если квадрат со стороной 1 м разрезать на квадраты со стороной 1 см и сложить полученные квадраты в ряд, то какой длины получится ряд?

485. Во сколько раз 18 гектаров больше 8 соток?

486. Сад имеет форму прямоугольника со сторонами 500 м и 400 м. Выразите его площадь в квадратных метрах; в арах; в гектарах.

- 487.** Поле площадью 5 га разделили на 8 равных участков прямоугольной формы. Определите площадь каждого участка в квадратных метрах.
- 488.** Площадь прямоугольника 91 см^2 , а его высота 7 см. Определите основание прямоугольника.
- 489.** Квартира состоит из двух комнат, кухни и подсобных помещений. Размеры первой комнаты $4 \text{ м} \times 5 \text{ м}$, второй — $3 \text{ м} \times 5 \text{ м}$, кухни $4 \text{ м} \times 3 \text{ м}$, а площадь подсобных помещений равна 10 м^2 . Определите общую площадь квартиры.
- *490.** Прямоугольник имеет стороны 2 см и 8 см.
 а) Найдите площадь квадрата, периметр которого равен периметру данного прямоугольника.
 б) Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади данного прямоугольника.
- 491.** а) Верно ли, что если прямоугольники равны, то их площади равны?
 б) Верно ли, что если площади прямоугольников равны, то прямоугольники равны?
- *492.** Как изменится площадь прямоугольника, если:
 а) его длину увеличить в 2 раза;
 б) его длину и ширину увеличить в 2 раза;
 в) увеличить его длину в 2 раза, а ширину — в 3 раза?
- *493.** Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если его сторону увеличить: а) в 2 раза; б) в 3 раза; в) в 10 раз?

2.10. Прямоугольный параллелепипед

Классная комната, коробка конфет или кирпич дают представление о прямоугольном параллелепипеде. На рисунке 101 изображён **прямоугольный параллелепипед**. Снизу, сверху и с боков он ограничен **гранями**. Каждая грань — прямоугольник. Нижнюю и верхнюю грани называют **основаниями** прямоугольного параллелепипеда, остальные грани — **боковыми гранями**. Грани пересекаются по отрезкам — **рёбрам** прямоугольного параллелепипеда. Точки,

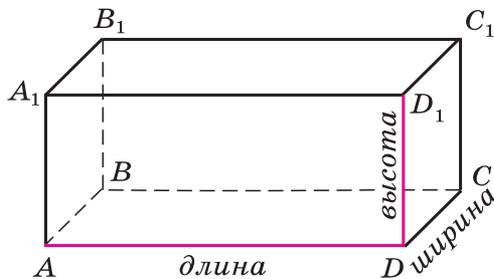


Рис. 101



Рис. 102

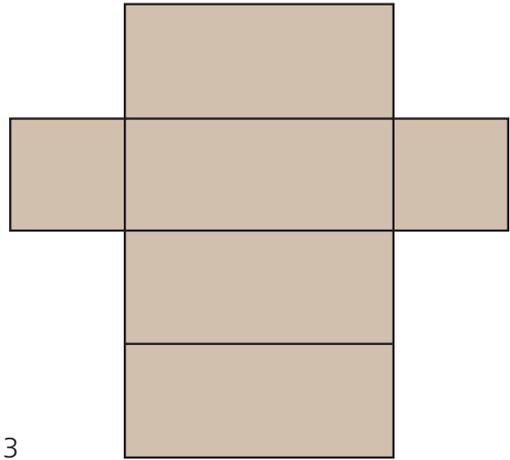


Рис. 103

в которых пересекаются рёбра, называют **вершинами** прямоугольного параллелепипеда.

У прямоугольного параллелепипеда шесть граней, двенадцать рёбер и восемь вершин.

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, которые сходятся в одной вершине, называют его **длиной**, **шириной** и **высотой**.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все рёбра равны, называют **кубом**.

На рисунке 102 изображена коробка, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда. Если её разрезать по вертикальным рёбрам, а затем развернуть, то получится **развёртка** прямоугольного параллелепипеда (рис. 103).

- 494.** На рисунке 101 изображён прямоугольный параллелепипед. Назовите его грани, рёбра и вершины.
- 495.** Сколько у прямоугольного параллелепипеда граней, рёбер и вершин?
- 496.** а) Что называют кубом?
б) Является ли любой прямоугольный параллелепипед кубом? Является ли любой куб прямоугольным параллелепипедом?
- 497.** Выполните в тетради рисунок прямоугольного параллелепипеда. Обозначьте его вершины буквами.
- 498.** Постройте развёртку куба со стороной 2 см.
- 499.** Постройте развёртку спичечного коробка на альбомном листе в натуральную величину. Вырежьте её, оставляя в нужных местах

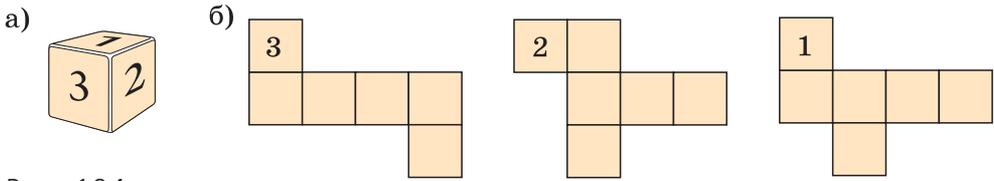


Рис. 104

припуски для склеивания. Склейте прямоугольный параллелепипед.

- 500.** а) Ребро куба равно 5 см. Найдите площадь поверхности куба, т. е. сумму площадей всех его граней.
 б) Ребро куба равно 10 см. Вычислите площадь поверхности куба.

- *501.** На гранях куба (рис. 104) написали числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что сумма чисел на двух противоположных гранях равна семи. Рядом с кубиком изображены его развёртки, на которых указано одно из этих чисел. Укажите остальные числа.

- *502.** На рисунке 105 изображены игральный кубик и его развёртка. Какое число изображено на:

- а) нижней грани;
 б) боковой грани слева;
 в) боковой грани сзади?

- *503.** На рисунке 106 изображены два одинаковых игровых кубика в разных положениях. Какие числа изображены на нижних гранях кубиков?

- *504.** Маша собралась клеить кубики, и для этого она нарисовала различные заготовки (рис. 107). Старший брат посмотрел её работу и сказал, что некоторые из них не являются развёртками кубика. Какие заготовки являются развёртками кубика?

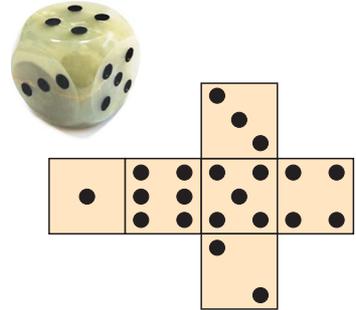


Рис. 105

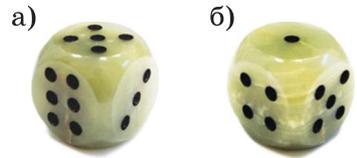


Рис. 106

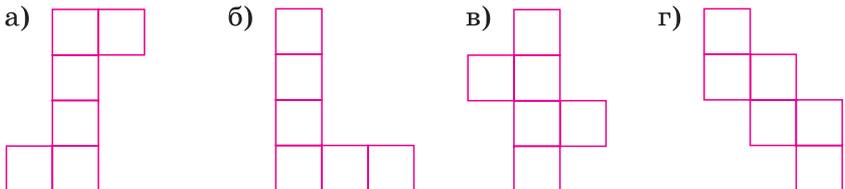


Рис. 107

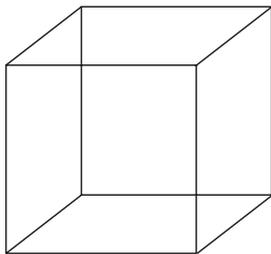


Рис. 108

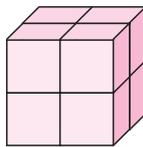


Рис. 109

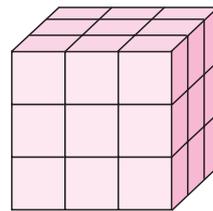


Рис. 110

- ***505.** Перерисуйте рисунок 108 в тетрадь и обведите жирной линией видимые рёбра куба так, чтобы куб был виден:
а) сверху и справа; б) снизу и слева.
- ***506.** Рёбра прямоугольного параллелепипеда равны 3 см, 4 см и 5 см.
а) Найдите площадь его основания и площадь боковой поверхности, т. е. сумму площадей боковых граней.
б) Найдите площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда.
Объясните, почему в задании «а» могут получиться три разных ответа.
- ***507.** На рисунке 109 изображён куб, сложенный из восьми одинаковых кубиков с ребром 1 см. Сколько прямоугольных параллелепипедов на этом рисунке?
- ***508.** Окрашенный куб распилили на 27 одинаковых кубиков с ребром 1 см (рис. 110). У скольких маленьких кубиков окрашена только одна грань; только две грани; три грани?

2.11. Объём прямоугольного параллелепипеда. Единицы объёма

Говорят, что
куб с ребром 1 м имеет объём один кубический метр (1 м^3),
куб с ребром 1 дм имеет объём один кубический дециметр (1 дм^3),
куб с ребром 1 см имеет объём один кубический сантиметр (1 см^3),
куб с ребром 1 мм имеет объём один кубический миллиметр (1 мм^3),
куб с ребром 1 км имеет объём один кубический километр (1 км^3).

Куб, ребро которого равно линейной единице, называют единичным кубом.

Объём единичного куба принимают за единицу измерения объёмов.

Если прямоугольный параллелепипед можно разрезать на k единичных кубов, то говорят, что его объём V равен k кубическим единицам:

$$V = k \text{ куб. ед.}$$

На рисунке 111 изображён прямоугольный параллелепипед, у которого ширина равна 3, длина — 4, а высота — 2 линейным единицам. Этот прямоугольный параллелепипед можно разрезать на 2 слоя, в каждом из которых по $3 \cdot 4$ единичных куба.

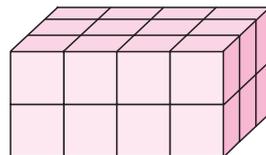


Рис. 111

Всего прямоугольный параллелепипед содержит $2 \cdot (3 \cdot 4) = 24$ единичных куба, т. е. его объём равен 24 единицам объёма.

Если три измерения прямоугольного параллелепипеда — длина, ширина и высота — измерены одной линейной единицей и выражены натуральными числами a , b и c , то

объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений:

$$V = a \cdot b \cdot c \text{ (кубических единиц).}$$

Площадь S основания прямоугольного параллелепипеда равна $a \cdot b$, поэтому

$$V = S \cdot c.$$

Объём V прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Так как у куба все рёбра равны, т. е. $a = b = c$, то

$$V = a^3, \text{ т. е.}$$

объём куба равен третьей степени длины его ребра.

Поэтому часто третью степень числа называют **кубом числа**.

Выразим одни единицы объёма через другие:

$$1 \text{ см}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ мм}^3 = 1000 \text{ мм}^3,$$

$$1 \text{ дм}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ см}^3 = 1000 \text{ см}^3,$$

$$1 \text{ м}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ дм}^3,$$

$$1 \text{ км}^3 = 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \text{ м}^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ м}^3 = 10^9 \text{ м}^3.$$

Для измерения объёмов жидкостей и сыпучих веществ используют специальную меру — **литр** (обозначают 1 л):

$$1 \text{ л} = 1 \text{ дм}^3.$$

509.

- Какой куб называют единичным?
- Чему равен объём прямоугольного параллелепипеда?
- Чему равен объём куба?
- Какие единицы измерения объёмов вы знаете?

510. Рассмотрите таблицу и ответьте на вопросы:

1 мм	1 см	1 дм	1 м	10 м	100 м	1 км
1 мм ²	1 см ²	1 дм ²	1 м ²	1 а	1 га	1 км ²
1 мм ³	1 см ³	1 дм ³	1 м ³	1000 м ³	1 000 000 м ³	1 км ³

- Во сколько раз увеличиваются единицы объёма, записанные в третьей строке таблицы, при переходе слева направо на одну клетку?
- Во сколько раз уменьшаются единицы объёма при переходе справа налево на одну клетку?
- Во сколько раз:
 - 1 см³ больше 1 мм³;
 - 1 дм³ больше 1 см³;
 - 1 дм³ больше 1 мм³;
 - 1 м³ больше 1 дм³;
 - 1 м³ больше 1 см³;
 - 1 км³ больше 1 м³?

511. а) Куб с ребром 1 м разрезали на кубики с ребром 1 дм и сложили их в ряд. Какой длины получился ряд?

б) Если куб с ребром 1 м разрезать на кубики с ребром 1 см и сложить их в ряд, то какой длины получится ряд?

512. Вычислите объём прямоугольного параллелепипеда, если его рёбра равны:

- 18 см, 16 см, 5 см;
- 12 см, 45 см, 2 см;
- 16 см, 23 см, 25 см;
- 11 см, 11 см, 11 см.

513. Вычислите объём прямоугольного параллелепипеда, площадь основания и высота которого равны:

- 136 см², 5 см;
- 298 см², 4 см;
- 154 см², 8 см;
- 91 см², 19 см.

514. а) Площадь пола комнаты 24 м², высота комнаты 3 м. Найдите объём комнаты.

б) Объём комнаты 45 м³, а площадь пола 15 м². Найдите высоту комнаты.

в) Объём комнаты 48 м³, а высота 3 м. Найдите площадь пола.

515. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длина которого 45 см, ширина 30 см, а высота 25 см. Сколько раз придётся наполнить водой трёхлитровую банку, чтобы уровень воды в аквариуме был равен 20 см?



***516.** Как изменится объём прямоугольного параллелепипеда, если:

- его длину увеличить в 2 раза;
- увеличить его длину в 2 раза, а ширину — в 3 раза;
- увеличить его длину в 2 раза, ширину — в 3 раза, а высоту — в 4 раза;
- его длину увеличить в 4 раза, а ширину и высоту уменьшить в 2 раза?

***517.** Во сколько раз увеличится объём куба при увеличении его ребра: а) в 2 раза; б) в 3 раза; в) в 10 раз?

ИЩЕМ ИНФОРМАЦИЮ

518. Найдите в справочной литературе или Интернете ответы на следующие вопросы:

- Какую величину на Руси измеряли вёдрами?
- Что измеряют галлонами? баррелями? В каких странах используются эти единицы измерения?
- На ёмкостях иностранного производства иногда встречается такое обозначение объёма: 100 cl (100 санлитров). Выразите этот объём в принятых в России единицах.

2.12. Единицы массы

Основная единица массы — **грамм**. Тысячу граммов называют **килограммом**:

$$1 \text{ кг} = 1000 \text{ г.}$$

Тысячу килограммов называют **тонной**:

$$1 \text{ т} = 1000 \text{ кг.}$$

Грамм — это масса 1 кубического сантиметра воды при температуре 4 °С. Значит, килограмм — это масса 1 кубического дециметра (литра) воды при 4 °С, а тонна — это масса 1 кубического метра воды при 4 °С.





Часто употребляют ещё одну единицу массы — **центнер**:

$$1 \text{ ц} = 100 \text{ кг.}$$

В повседневной жизни слово «масса» заменяют словом «вес». Например, говорят: «вес яблока 100 граммов» вместо «масса яблока 100 граммов». Поэтому в задачах мы будем чаще писать «вес» вместо «масса».

- 519.** Какие единицы массы вы знаете?
- 520.** Как определяется 1 г, 1 кг, 1 т?
- 521.** а) Какой объём при 4 °С занимает 1 г, 1 кг, 1 т воды?
б) Какой объём при 4 °С занимает 3 г, 7 кг, 79 т воды?
- 522.** Выразите данную массу в килограммах:
а) 1 ц; б) 12 ц; в) 1 т; г) 25 т; д) 37 ц; е) 12 т 24 ц.
- 523.** Выразите данную массу в граммах:
а) 1 кг; б) 87 кг; в) 1 ц;
г) 24 ц; д) 1 т; е) 13 т;
ж) 35 т 7 ц; з) 37 ц 15 кг; и) 35 т 36 ц 12 кг.
- 524.** Выполните действия:
а) $37 \text{ г} + 4 \text{ г}$; б) $9 \text{ кг } 326 \text{ г} + 2 \text{ кг} + 457 \text{ г}$;
в) $23 \text{ кг} - 2 \text{ кг } 754 \text{ г}$; г) $43 \text{ кг } 271 \text{ г} - 5 \text{ кг } 39 \text{ г}$.
- 525.** Данные величины запишите с точностью до 1 кг:
а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.

6 кг 721 г \approx 6 кг с недостатком;

6 кг 721 г \approx 7 кг с избытком и с округлением.

- 1) 5 кг 768 г; 2) 9 кг 326 г; 3) 4 ц 36 кг 125 г; 4) 5 т 7 ц.

2.13. Единицы времени

Любые процессы и движения происходят во времени. Время одного движения сравнивают с временем другого. Например, время движения поезда сравнивают с временем движения стрелки

часов, которое, в свою очередь, сравнивают с временем вращения Земли вокруг своей оси.

Сутки — основная единица времени. За сутки Земля совершает полный оборот вокруг своей оси.

Одни сутки содержат 24 часа. Один час содержит 60 минут, одна минута содержит 60 секунд:

$$1 \text{ сутки} = 24 \text{ ч}, \quad 1 \text{ ч} = 60 \text{ мин}, \\ 1 \text{ мин} = 60 \text{ с}, \quad 1 \text{ ч} = 3600 \text{ с}.$$

В науке основной единицей измерения времени считается секунда. Даже очень большие промежутки времени выражаются в секундах с помощью степени числа 10.

Приходится иметь дело и с долями секунды. В некоторых видах спортивных соревнований достижения измеряются в десятых и даже в сотых долях секунды.

Кроме того, используют такие единицы измерения времени, как **год, месяц, неделя** — эти названия вам знакомы, а также **квартал** и **декада**.

Год — время обращения Земли вокруг Солнца с точностью до 5—6 минут. Один год составляет 365 суток и 6 часов.

По действующему сейчас во всём мире календарю считается, что год содержит 365 суток. Указанная выше прибавка в 6 часов в течение 4 лет составляет целые сутки, которые добавляют к каждому четвёртому году. Считается, что если номер года делится на 4 (например, 2012), то год содержит 366 суток. Такой год называют **високосным**.

Год состоит из 12 месяцев. Так как 365 и 366 не делятся нацело на 12, то дни распределили между месяцами неравномерно: январь, март, май, июль, август, октябрь, декабрь содержат по 31 дню, апрель, июнь, сентябрь, ноябрь — по 30 дней, а февраль содержит 28 дней в обычном году и 29 в високосном году.

Квартал содержит 3 месяца, декада — 10 суток, неделя — 7 суток.



- 526.** а) Какой промежуток времени называют сутками?
б) Какие единицы измерения времени вы знаете?
- 527.** Какой год называют високосным?
- 528.** Сколько месяцев в году имеют ровно по 31 дню? по 30 дней? Сколько дней в феврале?
- 529.** Сколько минут содержат:
а) 2 ч; б) 3 ч; в) сутки; г) неделя?
- 530.** Сколько секунд содержат:
а) 2 ч; б) 3 ч; в) сутки; г) неделя?
- 531.** Вычислите:
а) 3 ч 15 мин + 2 ч 12 мин; б) 3 ч 20 мин + 1 ч 40 мин;
в) 7 ч 43 мин + 2 ч 25 мин; г) 5 ч 53 мин + 3 ч 48 мин;
д) 3 мин 20 с + 1 мин 13 с; е) 3 мин 48 с + 21 мин 49 с;
ж) 7 ч 43 мин – 2 ч 25 мин; з) 5 ч 23 мин – 3 ч 48 мин;
и) 3 мин 20 с – 1 мин 13 с; к) 3 мин 48 с – 1 мин 49 с.
- 532.** Самолёт поднялся в воздух в 12 ч 35 мин и находился в полёте 2 ч 40 мин. Когда приземлился самолёт?
- 533.** Самолёт поднялся в воздух в 14 ч 45 мин и приземлился в 17 ч 10 мин. Сколько времени он находился в полёте?
- 534.** а) Может ли в феврале быть 5 понедельников и 5 вторников? А в марте?
б) Мальчик купил абонемент на 6 посещений бассейна в месяц. Верно ли утверждение, что в одну из недель этого месяца он посетит бассейн дважды?
- 535.** Увеличьте:
а) 3 ч 15 мин в 3 раза; б) 1 ч 20 мин в 4 раза;
в) 5 ч 24 мин в 3 раза; г) 2 ч 12 мин в 7 раз.
- 536.** Уменьшите:
а) 3 ч 15 мин в 3 раза; б) 4 ч 48 мин в 4 раза;
в) 6 ч 56 мин в 4 раза; г) 2 ч 55 мин в 5 раз.

2.14. Задачи на движение

Путь, скорость, время. Говорят, что тело движется равномерно, если оно за каждую единицу времени проходит одно и то же расстояние. Например, если тело за каждый час проходит v км, говорят, что скорость тела v километров в час, и пишут: v км/ч. Если тело движется равномерно t ч со скоростью v км/ч, то оно проходит путь s км, и при этом верно равенство

$$s = v \cdot t.$$

Итак, чтобы найти путь, пройденный телом при равномерном движении, нужно его скорость умножить на время движения (в дальнейшем слово «равномерное» для краткости опускается, но подразумевается).

Чтобы найти скорость, нужно путь разделить на время движения ($v = s : t$), а чтобы найти время, нужно путь разделить на скорость ($t = s : v$).

Задача 1. Поезд шёл 4 ч со скоростью 65 км/ч. Какой путь он прошёл?

Решение. Умножим скорость поезда на время движения:
 $65 \cdot 4 = 260$ (км) — путь поезда.

Ответ: 260 км.

Задача 2. Пешеход за 3 ч прошёл 12 км. Какова его скорость?

Решение. Разделим путь, пройденный пешеходом, на время движения:

$12 : 3 = 4$ (км/ч) — скорость пешехода.

Ответ: 4 км/ч.

Задача 3. Велосипедист проехал 24 км со скоростью 8 км/ч. Сколько времени он затратил на этот путь?

Решение. Разделим путь, который проехал велосипедист, на его скорость:

$24 : 8 = 3$ (ч) — время движения велосипедиста.

Ответ: 3 ч.

Движение по реке. Скорость катера в стоячей воде (в озере) называют ещё **собственной скоростью** катера. Если катер движется по течению реки, то его скорость равна сумме его собственной скорости и скорости течения реки; если же катер движется против течения реки, то его скорость равна разности его собственной скорости и скорости течения реки.

Задача 4. Скорость катера в стоячей воде равна 15 км/ч, а скорость течения реки — 3 км/ч. Какова скорость катера по течению и скорость катера против течения реки?

Решение.

1) $15 + 3 = 18$ (км/ч) — скорость катера по течению реки;

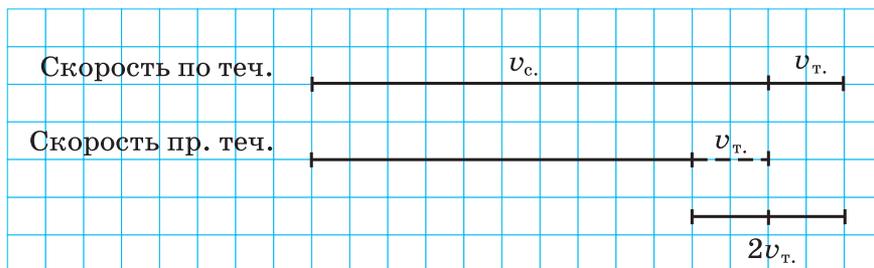
2) $15 - 3 = 12$ (км/ч) — скорость катера против течения реки.

Ответ: 18 км/ч и 12 км/ч.

Обратим внимание: скорость катера по течению реки — это сумма его собственной скорости и скорости течения реки, а скорость катера против течения реки — это разность его собственной скорости и скорости течения реки, поэтому



скорость по течению реки больше скорости против течения
на удвоенную скорость течения.



Задача 5. Скорость моторной лодки по течению реки равна 48 км/ч, а против течения — 42 км/ч. Какова скорость течения реки и собственная скорость моторной лодки?

Решение.

- 1) $48 - 42 = 6$ (км/ч) — удвоенная скорость течения;
- 2) $6 : 2 = 3$ (км/ч) — скорость течения;
- 3) $48 - 3 = 45$ (км/ч) — собственная скорость.

Ответ: 3 км/ч и 45 км/ч.

Скорость удаления, скорость сближения. Рассмотрим задачи, при решении которых полезно использовать скорость удаления и скорость сближения.

Задача 6. Два пешехода вышли одновременно в противоположных направлениях из одного пункта. Скорость первого 4 км/ч, а второго 5 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 3 ч?

Решение. Эту задачу можно решить, вычислив предварительно путь, пройденный каждым пешеходом.

I способ.

- 1) $3 \cdot 4 = 12$ (км) — прошёл 1-й пешеход за 3 ч;
- 2) $3 \cdot 5 = 15$ (км) — прошёл 2-й пешеход за 3 ч;
- 3) $12 + 15 = 27$ (км) — расстояние между пешеходами через 3 ч.

Для решения той же задачи можно составить числовое выражение $3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$, вынести общий множитель 3 за скобки:

$$3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 3 \cdot (4 + 5).$$

Теперь видно, что задачу можно решить вторым способом. Сумма $4 + 5$ показывает, на сколько километров в час удаляются пешеходы друг от друга, эту величину называют **скоростью удаления**.

II способ.

- 1) $4 + 5 = 9$ (км/ч) — скорость удаления;
- 2) $9 \cdot 3 = 27$ (км) — расстояние между пешеходами через 3 ч.

Ответ: 27 км.

Задача 7. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 27 км. Через сколько часов они встретятся, если скорость первого 4 км/ч, а скорость второго 5 км/ч?

Решение. Решим эту задачу, определив скорость сближения.

1) $4 + 5 = 9$ (км/ч) — скорость сближения;

2) $27 : 9 = 3$ (ч) — через это время пешеходы встретятся.

Ответ: через 3 ч.

537. а) Пешеход за 3 ч прошёл 12 км. Какова его скорость?

б) Какой путь прошёл катер по озеру за 2 ч со скоростью 12 км/ч?

в) Бревно плывёт по реке, скорость течения которой 3 км/ч. За какое время оно проплывёт 15 км?



538. а) Мальчик заметил, что на путь по течению реки было затрачено меньше времени, чем на тот же путь против течения. Чем это можно объяснить, если мотор лодки работал одинаково хорошо во время всей поездки?

б) На путь из пункта *A* в пункт *B* теплоход затратил 1 ч 40 мин, а на обратный путь — 2 ч. В каком направлении течёт река?

в) Скорость катера в стоячей воде равна 18 км/ч. Какой путь пройдёт катер за 3 ч?

г) Скорость течения реки 2 км/ч. На сколько километров река относит любой предмет (щепку, плот, лодку) за 1 ч, за 5 ч?

539. Скорость катера в стоячей воде 18 км/ч, скорость течения реки 2 км/ч. С какой скоростью будет двигаться катер по течению реки? против течения?

540. Скорость катера в стоячей воде равна 12 км/ч, а скорость течения реки — 3 км/ч. Определите:

а) скорость катера по течению реки;

б) скорость катера против течения реки;

в) путь катера по течению реки за 3 ч;

г) путь катера против течения реки за 5 ч.

541. а) Собственная скорость теплохода 27 км/ч, скорость течения реки 3 км/ч. Сколько времени затратит теплоход на путь по течению реки между двумя причалами, если расстояние между ними 120 км?

б) Сколько времени потребуется для того, чтобы проплыть на моторной лодке 90 км против течения, если её собственная скорость 20 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч?

542. Катер, имеющий собственную скорость 15 км/ч, проплыл 2 ч по течению реки и 3 ч против течения. Какое расстояние проплыл катер за всё время, если скорость течения реки 2 км/ч?

543. а) Расстояние между причалами 24 км. Сколько времени потратит моторная лодка на путь между причалами туда и обратно, если собственная скорость моторной лодки 10 км/ч, а скорость течения 2 км/ч?

б) Расстояние между двумя причалами 36 км. Сколько времени потратит на путь от одного причала до другого и обратно катер, если его собственная скорость 15 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч?

544. Определив скорости, заполните таблицу:

	$v_{\text{собств.}}$	$v_{\text{течения}}$	$v_{\text{по теч.}}$	$v_{\text{пр. теч.}}$
1	12 км/ч	4 км/ч		
2	25 км/ч		28 км/ч	
3	24 км/ч			20 км/ч
4		5 км/ч	17 км/ч	
5		3 км/ч		16 км/ч
6			45 км/ч	39 км/ч

545. Определите, какая скорость получится следующим действием:

- а) $v_{\text{с.}} + v_{\text{т.}}$; б) $v_{\text{с.}} - v_{\text{т.}}$; в) $v_{\text{пр. т.}} + v_{\text{т.}}$;
 г) $v_{\text{пр. т.}} + 2v_{\text{т.}}$; д) $v_{\text{по т.}} - v_{\text{т.}}$; е) $v_{\text{по т.}} - v_{\text{пр. т.}}$

546. а) По течению моторная лодка проплыла 48 км за 3 ч, а против течения — за 4 ч. Найдите скорость течения.

б) Катер проплыл 72 км по течению за 2 ч, а против течения за 3 ч. За сколько часов это расстояние проплывут плоты?

547. Скорость течения равна 3 км/ч. На сколько километров в час скорость катера по течению больше скорости против течения?

548. 15 июля 1923 года из Москвы в Нижний Новгород вылетел аэроплан «Ультиматум». Так была открыта первая трасса Аэрофлота длиной 420 км. Аэроплан шёл на высоте 250 м и преодолел всё расстояние за 3 ч 30 мин. Найдите скорость аэроплана. Какие условия в задаче являются лишними?



- 549.** а) Из одного пункта в противоположных направлениях одновременно выехали две автомашины. Их скорости 60 км/ч и 80 км/ч. Определите скорость удаления автомашин.
б) Два поезда одновременно вышли с одной станции в противоположных направлениях. Их скорости равны 60 км/ч и 70 км/ч. Через сколько часов расстояние между поездами будет 260 км?
- 550.** а) Из двух сёл, расстояние между которыми 36 км, одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода. Скорость первого 4 км/ч, скорость второго 5 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 3 ч? Определите скорость сближения пешеходов.
б) Две автомашины движутся навстречу друг другу со скоростями 60 км/ч и 80 км/ч. Определите скорость сближения автомашин.
- 551.** а) Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 36 км. Скорость первого 10 км/ч, а второго 8 км/ч. Через сколько часов они встретятся?
б) *Старинная задача.* Идёт один человек в другой город и проходит в день по 40 вёрст¹, а другой человек идёт навстречу ему из другого города и в день проходит по 30 вёрст. Расстояние между городами 700 вёрст. Через сколько дней путники встретятся?
- 552.** а) Расстояние между двумя городами 900 км. Два поезда вышли из этих городов навстречу друг другу со скоростями 60 км/ч и 80 км/ч. На каком расстоянии друг от друга были поезда за 1 ч до встречи? через 1 час после встречи? Есть ли в задаче лишнее условие?
б) Расстояние от села до города 45 км. Из села в город вышел пешеход со скоростью 5 км/ч. Через час из города в село выехал велосипедист со скоростью 15 км/ч. Кто из них в момент встречи будет ближе к селу?
- 553.** Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух сёл, расстояние между которыми 54 км. Через сколько часов велосипедисты будут друг от друга на расстоянии 27 км, если их скорости 12 км/ч и 15 км/ч?
- 554.** а) Велосипедист и мотоциклист выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Скорость мотоциклиста 40 км/ч, а велосипедиста 12 км/ч. Какова скорость их удаления друг от друга? Через сколько часов расстояние между ними будет 56 км?

¹ Здесь и далее старинные единицы измерения смотри на форзаце.

б) Из двух пунктов, удалённых друг от друга на 30 км, выехали одновременно в одном направлении два мотоциклиста. Скорость первого 40 км/ч, а второго 50 км/ч. Через сколько часов второй догонит первого?

555.

Некий юноша пошёл из Москвы к Вологде. Он проходил в день по 40 вёрст. Через день вслед за ним был послан другой юноша, проходивший в день по 45 вёрст. Через сколько дней второй догонит первого?

556.

Из Москвы в Тверь вышли одновременно 2 поезда. Первый проходил в час 39 вёрст и прибыл в Тверь двумя часами раньше второго, который проходил в час 26 вёрст. Сколько вёрст от Москвы до Твери?

557.

Из двух городов, расстояние между которыми 900 км, одновременно навстречу друг другу вышли товарный и скорый поезда. Товарный поезд может пройти это расстояние за 18 ч, а скорый — вдвое быстрее. Через сколько часов они встретятся?

558.

а) Расстояние между городами A и B равно 720 км. Из A в B вышел скорый поезд со скоростью 80 км/ч. Через 2 ч навстречу ему из B в A вышел пассажирский поезд со скоростью 60 км/ч. Через сколько часов после выхода второго поезда они встретятся?

б) Из села вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. Через 3 ч вслед за ним выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч. Через сколько часов велосипедист догонит пешехода?

559.

Собака усмотрела в 150 саженях зайца, который пробегает в 2 мин по 500 сажен, а собака в 5 мин — 1300 сажен. Спрашивается, в какое время собака догонит зайца.

560.

Пассажир метро, стоящий на ступеньке эскалатора, поднимается вверх за 3 мин. Если он идёт вверх, то поднимается за 2 мин. С какой скоростью идёт пассажир метро, если длина эскалатора 150 м?

***561.**

Папа и сын плывут на лодке против течения. В какой-то момент сын уронил за борт папину шляпу. Только через 15 мин папа заметил пропажу. Как далеко друг от друга в этот момент находились лодка и шляпа, если собственная скорость лодки 8 км/ч, а скорость течения 3 км/ч? Нет ли в задаче лишних данных?



562. Два поезда движутся навстречу друг другу по параллельным путям — один со скоростью 100 км/ч, другой со скоростью 80 км/ч. Пассажир, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд шёл мимо него 12 с. Какова длина первого поезда?

563. Железнодорожный состав длиной 1 км проходит мимо километрового столба за 1 мин, а через туннель при той же скорости за 3 мин. Какова длина туннеля?

564. а) Из пункта A в пункт B вышел пешеход со скоростью 5 км/ч. Одновременно с ним из A в B выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч. Велосипедист доехал до B , повернул назад и поехал с той же скоростью навстречу пешеходу. Через сколько часов после начала движения они встретятся, если расстояние между A и B 30 км?

б) Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 17 км, выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч. Одновременно с ним из A в B вышел пешеход со скоростью 5 км/ч. Велосипедист доехал до B , повернул и поехал назад с той же скоростью. Через сколько часов после начала движения они встретятся?

в) Расстояние между двумя пунктами 12 км. Из них одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста со скоростью 10 км/ч и 8 км/ч. Каждый из них доехал до другого пункта, повернул и поехал назад с той же скоростью. Через сколько часов после начала движения они встретятся во второй раз?

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ 2

1 Многоугольники

Возьмём на плоскости несколько точек, например A , B , C , D , E , и соединим точки A и B , B и C , C и D , D и E отрезками. Если никакие два из этих отрезков, имеющих общие точки, не лежат на одной прямой, то полученную линию называют **ломаной линией** или, коротко, **ломаной** и обозначают $ABCDE$. Отрезки AB , BC , CD и DE называют **звеньями** ломаной. На рисунке 112 изображена ломаная $ABCDE$, она имеет четыре звена AB , BC , CD и DE .

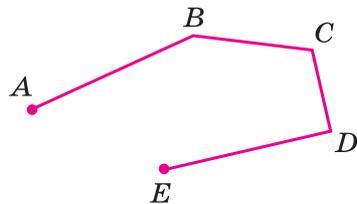


Рис. 112

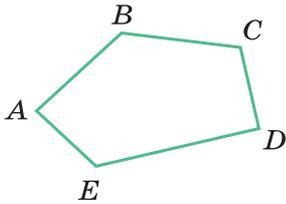


Рис. 113

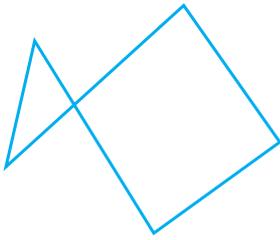


Рис. 114

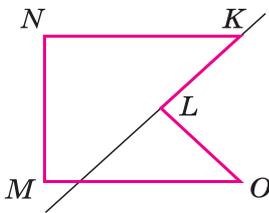
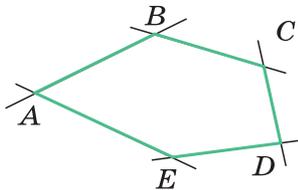


Рис. 115

Сумму длин всех звеньев ломаной называют **длиной ломаной**. Например, длина ломаной $ABCDE$ на рисунке 112 есть $AB + BC + CD + DE$. Длина ломаной $ABCDE$ больше расстояния AE между её концами.

Если конец ломаной совпадает с её началом, то ломаную называют **замкнутой**. Например, ломаная $ABCDEA$ на рисунке 113 замкнутая.

Фигуру, образованную такой замкнутой ломаной линией, что никакие два её звена не имеют общих точек, кроме концов соседних звеньев ломаной, называют **многоугольником**. На рисунке 113 изображён многоугольник, а на рисунке 114 — замкнутая ломаная линия, не являющаяся многоугольником.

В многоугольнике звенья ломаной называют **сторонами** многоугольника, углы, составленные каждым двумя соседними сторонами, — **углами** многоугольника, а их вершины — **вершинами** многоугольника. Сумму длин сторон многоугольника называют его **периметром**.

Заметим, что многоугольником называют как замкнутую ломаную, так и эту линию вместе с частью плоскости, расположенной внутри этой линии.

Многоугольник называют **выпуклым**, если он весь расположен по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону. Например, на рисунке 115 многоугольник $ABCDE$ выпуклый, а многоугольник $MNKLO$ нет.

Наименьшее число сторон в многоугольнике равно трём. По числу сторон многоугольник называют треугольником, четырёхугольником, пятиугольником и т. д.

Многоугольник называют **правильным**, если все его углы и все стороны равны. Примером правильного многоугольника является квадрат.

Два многоугольника называют **равными**, если их можно совместить при наложении. Например, на рисунке 116 многоугольники $ABCDE$ и $KLMNO$ равны, так как они

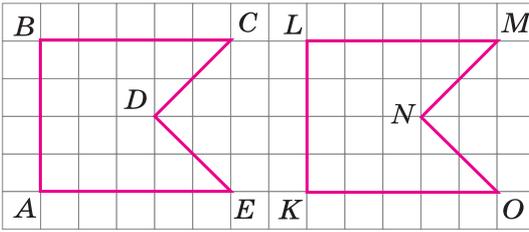


Рис. 116

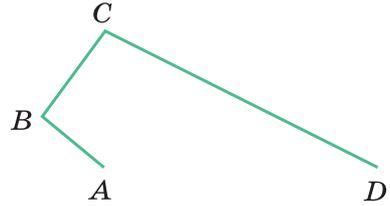


Рис. 117

совмещаются при наложении. Равные многоугольники имеют равные площади.

Для определения площади части плоскости, находящейся внутри многоугольника или какой-либо другой фигуры, надо выяснить, сколько раз выбранная единица площади содержится в этой части плоскости.

- 565.** а) Какую линию называют ломаной линией?
 б) Что называют звеньями ломаной?
 в) Как обозначают ломаную?
 г) Какую ломаную называют замкнутой?

566. Постройте ломаную $ABCDE$. Назовите все её звенья.

567. Существует ли замкнутая ломаная, имеющая три звена, длины которых равны:

- а) 1 см, 2 см, 2 см; б) 1 см, 2 см, 3 см; в) 1 см, 2 см, 4 см?

568. На рисунке 117 изображена ломаная $ABCD$. $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 13$ см, $AD = 12$ см. Определите длину ломаной $ABCD$ и расстояние между её концами.

Доказываем

569. Докажите, что длина ломаной ABC больше длины ломаной ADC (рис. 118).

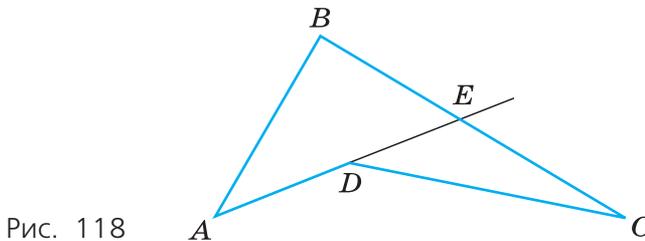


Рис. 118

- 570.** а) Что называют многоугольником?
 б) Что называют сторонами, углами, вершинами многоугольника?
 в) Что называют периметром многоугольника?
 г) Какой многоугольник называют выпуклым?
 д) Какие многоугольники называют равными?

571. Постройте пятиугольник $ABCDE$. Назовите все его стороны и вершины.

- 572.** Отрезок, соединяющий две несоседние вершины многоугольника, называют **диагональю** многоугольника. Например, в четырёхугольнике $ABCD$ отрезки AC и BD — диагонали (рис. 119). Сколько диагоналей в выпуклом:

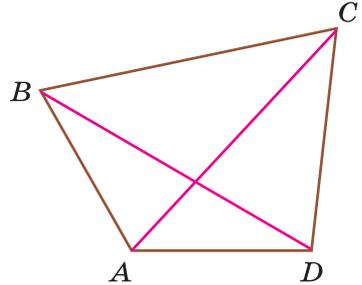


Рис. 119

- а) четырёхугольнике;
 б) пятиугольнике;
 в) шестиугольнике;
 г) семиугольнике?

- 573.** Сколько диагоналей в выпуклом: а) десятиугольнике; б) двадцатиугольнике?

Исследуем

- 574.** а) Исследуйте зависимость числа диагоналей (d) выпуклого многоугольника, выходящих из одной его вершины, от числа сторон этого многоугольника (n). Результаты занесите в таблицу.

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d	1	2							

- б) Задайте формулой зависимость d от n .

- 575.** а) Исследуйте зависимость числа диагоналей (d) выпуклого многоугольника от числа его сторон (n). Результаты занесите в таблицу.

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d	2	5							

- б) Задайте формулой зависимость d от n .

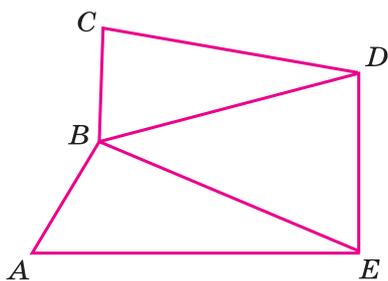


Рис. 120

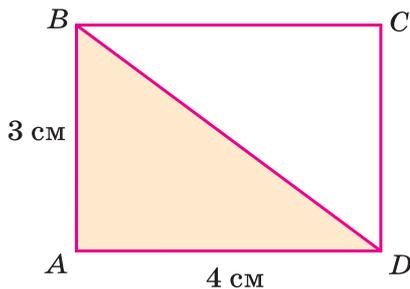


Рис. 121

576. Периметры треугольников BCD , BDE и ABE равны соответственно 20 см, 21 см и 22 см, а периметр пятиугольника $ABCDE$ равен 31 см (рис. 120). Определите длины диагоналей BD и BE , если известно, что они равны.

577. Считают, что если многоугольники равны, то их площади равны; если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей составляющих его многоугольников. На рисунке 121 изображён прямоугольник $ABCD$. Верно ли, что площади треугольников ABD и CDB равны? Чему равна площадь треугольника ABD ?

ДОКАЗЫВАЕМ

578. В прямоугольнике $KLMN$ диагонали KM и LN пересекаются в точке O (рис. 122). Докажите, что площади треугольников KLO и NMO равны.

579. На рисунке 123 показано, как с помощью циркуля и линейки можно построить правильный шестиугольник, у которого стороны равны и углы равны. Постройте в тетради правильный шестиугольник и измерьте его углы.

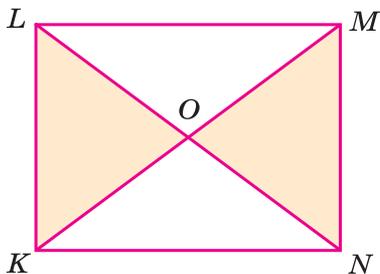


Рис. 122

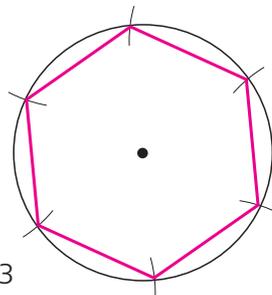


Рис. 123

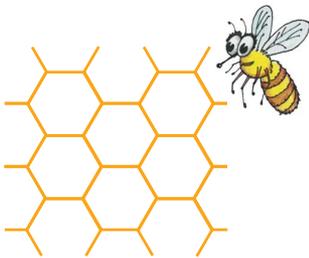


Рис. 124

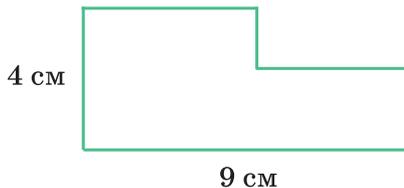


Рис. 125

а)

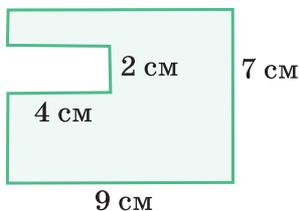
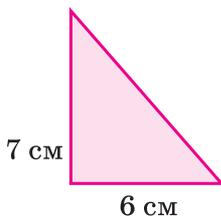
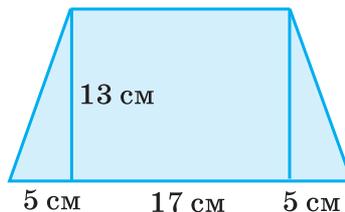


Рис. 126

б)



в)



580. Пчёлы строят свои соты в виде правильных шестиугольников (рис. 124). Постройте на альбомном листе рисунок пчелиных сот.

581. Из листа фанеры размером $11\text{ см} \times 15\text{ см}$ выпилили два квадрата со стороной 5 см и три прямоугольника со сторонами 4 см и 7 см . Определите площадь оставшейся части.

- 582.** а) Определите периметр шестиугольника (рис. 125).
 б) Определите площадь многоугольника (рис. 126).
 в) Определите периметр многоугольника, изображённого на рисунке 126, а. Какое условие лишнее?

2 ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ



Естественная и древнейшая мера длины — шаг. Однако для измерения больших расстояний в древности пользовались и другими мерами, в основе которых лежал тот же шаг. Например, древнеримская *миля* равнялась 1000 шагам. Во многих странах Средиземноморья в I тысячелетии до н. э. за меру длины принимали *стадий*. Это — расстояние, которое проходил человек спокойным

шагом за промежуток времени, измеряемый от появления первого луча солнца на рассвете до появления над горизонтом полного солнечного диска.

В старину на Руси пользовались такими мерами длины: *пядь* — расстояние между концами вытянутых большого и указательного пальцев руки (примерно 18—23 см); *локоть* — расстояние от конца среднего пальца руки до локтя (примерно 38—46 см); *сажень* — различали «простую» (примерно 152 см), «маховую» (примерно 176 см) и «косую» (примерно 248 см) сажени.

С середины XVI века на Руси появилась мера длины *аршин* (примерно 71 см), заимствованная с Востока. Развитие литейного дела и артиллерии способствовало появлению ещё одной меры — *дюйма* (примерно 25 мм), которая в военном деле используется до сих пор.

Эти старинные названия мер длины, а также и старинные названия мер весов встречаются во многих пословицах, поговорках и образных выражениях: ни пяди земли; мерить на свой аршин; косая сажень в плечах; съесть пуд соли; фунт лиха; мал золотник, да дорог; ты от дела на пяденьку, а оно от тебя на саженьку.

В XVI—XVII веках на Руси установилась система мер длин и весов (см. форзац), которой пользовались до 1918 года, когда была введена **метрическая система мер**.

Метрическая система мер была введена впервые во Франции в 1795 году. Её история такова. В 1792 году Парижская академия наук решила измерить длину земного меридиана, проходящего через Париж. Отдельные части этого меридиана были измерены. Длина других частей была вычислена на основе этих измерений. В результате большой работы была найдена длина парижского меридиана в существовавших тогда французских мерах длины — **тузах** (1 туаз \approx 1 м 95 см).

Парижская академия наук предложила в качестве единой меры длины новую единицу измерения — **метр**, равную одной десяти-миллионной доле четверти парижского меридиана. В том же 1792 году Парижская академия наук предложила в качестве единой меры веса использовать вес одного кубического дециметра воды при температуре 4 °С — **килограмм**. Были изготовлены эталон килограмма и эталон метра, на которых выбили гордую надпись: «На все времена, для всех народов».



В городе Севре (Франция) в Международном бюро мер и весов в специальном помещении, где поддерживается температура 0°C , на специальных подставках лежит стержень. На нём имеются две отметки, расстояние между которыми принято за основную единицу измерения — метр. Это международный эталон метра. Там же хранится изготовленная из специального сплава гиря, вес которой принят за основную единицу веса — килограмм.

Во многих странах мира хранятся национальные эталоны метра и килограмма — копии международных эталонов. В России такие копии хранятся в Институте метрологии им. Д. И. Менделеева.

3 АНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

- 583.** Как разрезать торт тремя прямыми так, чтобы получилось семь частей и на каждой из них была розочка (рис. 127)?
- 584.** Можно ли двумя ударами топора разрубить подкову на шесть частей, не перемещая части после удара (рис. 128)?
- 585.** Улитка за день поднимается на 4 м, а за ночь опускается на 2 м. За сколько дней она поднимется на вершину столба высотой 8 м?
- 586.** Прямоугольник 4×9 разрежьте на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.
- 587.** Из прямоугольника 10×7 вырезали прямоугольник 1×6 (рис. 129). Разрежьте полученную фигуру на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.
- 588.** Клетчатая бумага даёт представление о том, как можно равными квадратами выложить плоскость. На рисунке 130 показаны способы, которыми укладывают кафельную плитку на пол или на стены. Плоскость можно выложить также равными

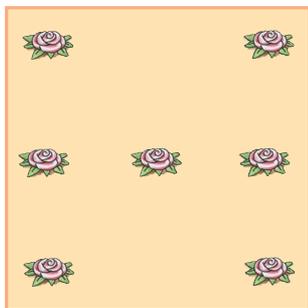


Рис. 127

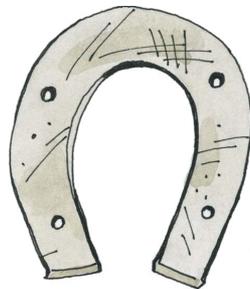


Рис. 128

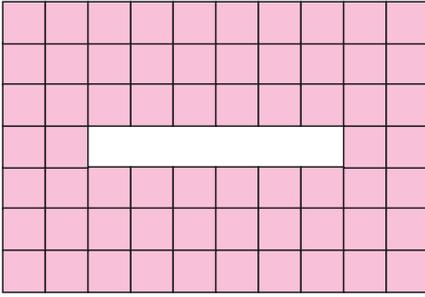


Рис. 129

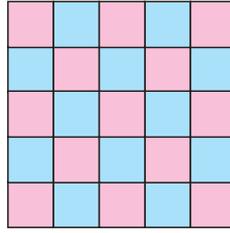


Рис. 130

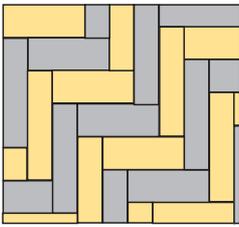
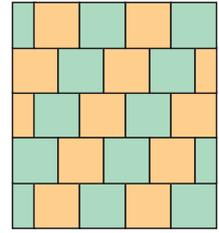


Рис. 131

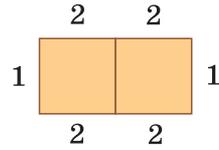
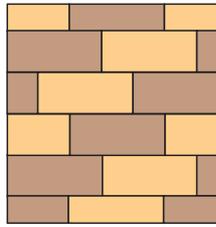
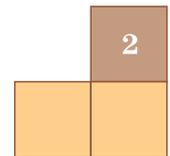
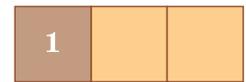


Рис. 132

прямоугольниками. На рисунке 131 показаны два способа покрытия пола паркетом из равных прямоугольников. Придумайте ещё два своих паркета из равных прямоугольников.

589. Фигуры домино, тримино, тетрамино¹ составляют из двух, трёх, четырёх квадратов так, чтобы любой квадрат имел общую сторону хотя бы с одним квадратом. Из двух одинаковых квадратов можно составить только одну фигуру домино (рис. 132). Фигуры тримино можно получить из единственной фигуры домино, приставляя к ней различными способами ещё один квадрат. Получатся только две различные фигуры тримино (рис. 133). Цифры около фигуры домино соответствуют номеру фигуры тримино, которая получится, если на место цифры приложить третий квадрат. Убедитесь, что можно составить только 5 фигур тетрамино.



¹ Тетра — четыре (*греч.*).

Рис. 133

ИССЛЕДУЕМ

- 590.** Фигуры пентамино¹ можно получить из фигур тетрамино, приставляя к ним различными способами ещё один квадрат. Сколько фигур пентамино можно составить?
- 591.** Фигуры гексамино² можно получить из фигур пентамино, приставляя к ним различными способами ещё один квадрат. Сколько фигур гексамино можно составить?
- 592.** Подсчитайте, сколько различных развёрток имеет куб. Для решения этой задачи можно рассмотреть фигуры гексамино (см. задачу 591).
- 593.** Пол в классе имеет форму прямоугольника со сторонами 5 м и 6 м. Если изобразить класс на плане с уменьшением сторон в 10 раз, то во сколько раз площадь класса на этом плане будет меньше настоящей площади класса?

¹ Пента — пять (*греч.*).

² Гекса — шесть (*греч.*).

ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Изучая главу 3, вы узнаете свойства и признаки делимости натуральных чисел. Эти теоретические сведения дают возможность решать задачи на доказательство не только в пятом, но и в старших классах. Здесь впервые появятся много задач на доказательство и задач, в которых надо определить, возможна ли описанная ситуация. Задачи из Дополнений к главе 3 полезно освоить всем, кто хочет научиться правильно рассуждать, а также успешно выступать на различных конкурсах и олимпиадах.

3.1. Свойства делимости

Как уже отмечалось в главе 1, натуральное число a делится нацело на натуральное число b , если существует натуральное число c , при умножении которого на b получается a :

$$a = c \cdot b.$$

В дальнейшем слова «натуральные» и «нацело» будем опускать для краткости.

Если a делится на b , то говорят ещё, что a **кратно** b . Например, число 48 кратно числу 24.

Свойство 1. Если один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.

Например, 15 делится на 3, значит, и $15 \cdot 11$ делится на 3, потому что $15 \cdot 11 = (3 \cdot 5) \cdot 11 = 3 \cdot (5 \cdot 11)$.

Свойство 2. Если первое число делится на второе, а второе делится на третье, то первое число делится на третье.

Например, 777 делится на 111, потому что $777 = 7 \cdot 111$, а 111 делится на 3, потому что $111 = 3 \cdot 37$. Из этого следует, что 777 делится на 3, так как $777 = 3 \cdot (37 \cdot 7)$.

Свойство 3. Если каждое из двух чисел делится на некоторое число, то их сумма и разность делятся на это число.

Например, 100 делится на 4, потому что $100 = 25 \cdot 4$; 36 тоже делится на 4, потому что $36 = 9 \cdot 4$. Из этого следует, что 136 делится на 4, потому что

$$136 = 100 + 36 = 25 \cdot 4 + 9 \cdot 4 = (25 + 9) \cdot 4 = 34 \cdot 4.$$

Можно также заключить, что число 64 делится на 4, потому что

$$64 = 100 - 36 = 25 \cdot 4 - 9 \cdot 4 = (25 - 9) \cdot 4 = 16 \cdot 4.$$

Свойство 4. Если одно из двух чисел делится на некоторое число, а другое на него не делится, то их сумма и разность не делятся на это число.

Например, 148 делится на 37, потому что $148 = 4 \cdot 37$, а 11 не делится на 37. Очевидно, что сумма $148 + 11$ и разность $148 - 11$ не делятся на 37, иначе это противоречило бы свойству 3.

594. Сформулируйте свойства делимости.

595. Объясните, почему на 12 делится произведение:

- а) $12 \cdot 47$; б) $12 \cdot 120$; в) $120 \cdot 51$;
г) $24 \cdot 17$; д) $11 \cdot 36$; е) $13 \cdot 48$.

596. Запишите числа 24, 42, 36, 72, 75 в виде произведения и покажите, что:

- а) 24 делится на 12; б) 42 делится на 21;
в) 36 делится на 6; г) 72 делится на 9;
д) 75 делится на 5; е) 75 делится на 25.

597. Покажите, что любое из чисел 5, 10, 15, 20, 25, 30 можно записать в виде $5 \cdot k$, где k — некоторое натуральное число.

598. Напишите 5 чисел, кратных числу:

- а) 2; б) 5; в) 20; г) 7; д) 3; е) 9; ж) 4; з) 11.

599. Напишите три числа, которые можно записать в виде:

- а) $2k$; б) $5k$; в) $20k$; г) $7k$,

где k — натуральное число.



600. Верно ли утверждение:

а) если каждое из двух слагаемых делится на 2, то и сумма делится на 2;

б) если каждое из двух слагаемых делится на 5, то и сумма делится на 5;

в) если уменьшаемое и вычитаемое делятся на 3, то и разность делится на 3?

601. Объясните, почему:

а) сумма $45 + 36$ делится на 9;

б) сумма $99 + 88$ делится на 11;

в) сумма $13 \cdot a + 13 \cdot c$ делится на 13, где a и c — натуральные числа;

г) сумма $12 \cdot a + 15 \cdot b + 9 \cdot c$ делится на 3, где a , b и c — натуральные числа.

602. Докажите, что если a , b и c — натуральные числа, то:

- а) $(3 \cdot a + 3 \cdot b) : 3 = a + b$; б) $(c \cdot a + c \cdot b) : c = a + b$.

603. Вычислите:

а) $(48 + 36) : 2 = 48 : 2 + 36 : 2 = \dots$

б) $(16 + 20) : 4$;

в) $(50 + 120) : 5$;

г) $(484 + 426) : 2$;

д) $(840 - 488) : 4$;

е) $(963 - 690) : 3$;

ж) $(990 + 99) : 9$.

604. Проверьте, делится ли:

а) 1356 на 2;

б) 4957 на 2;

в) 8151 на 3;

г) 7361 на 3;

д) 7263 на 2;

е) 9751 на 2.

605. Проверьте, делится ли число 123 456 789:

а) на 2;

б) на 3;

в) на 9.

3.2. Признаки делимости

Если число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10.

Например, число 4560 оканчивается цифрой 0, его можно представить в виде произведения $456 \cdot 10$, которое делится на 10 (по свойству 1).

Число 4561 не делится на 10, потому что $4561 = 4560 + 1$ — сумма числа 4560, делящегося на 10, и числа 1, не делящегося на 10 (по свойству 4).

Если число оканчивается одной из цифр 0 или 5, то оно делится на 5.

Например, число 2300 делится на 5, потому что это число делится на 10, а 10 делится на 5 (по свойству 2).

Число 2305 оканчивается цифрой 5, оно делится на 5, так как его можно записать в виде суммы $(2300 + 5)$ чисел, делящихся на 5 (по свойству 3).

Число 52 не делится на 5, потому что $52 = 50 + 2$ — сумма числа 50, делящегося на 5, и числа 2, не делящегося на 5 (по свойству 4).

Если число оканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8, то оно делится на 2.

Например, число 130 оканчивается цифрой 0, оно делится на 10, а 10 делится на 2, следовательно, 130 делится на 2 (по свойству 2).

Число 136 оканчивается цифрой 6, оно делится на 2, так как его можно записать в виде суммы $(130 + 6)$ чисел, делящихся на 2 (по свойству 3).

Число 137 не делится на 2, потому что $137 = 130 + 7$ — сумма числа 130, делящегося на 2, и числа 7, не делящегося на 2 (по свойству 4).

Число, делящееся на 2, называют **чётным**.

Число, не делящееся на 2, называют **нечётным**.

Например, числа 152 и 790 — чётные, а числа 111 и 293 — нечётные.

Если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9.

Например, сумма цифр $7 + 2 + 4 + 5 = 18$ числа 7245 делится на 9. Число 7245 делится на 9, потому что его можно представить в виде суммы

$$7 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 = 7 \cdot (999 + 1) + 2 \cdot (99 + 1) + 4 \cdot (9 + 1) + 5 = \\ = (7 \cdot 999 + 2 \cdot 99 + 4 \cdot 9) + (7 + 2 + 4 + 5),$$

где сумма в первых скобках делится на 9, а во вторых скобках — сумма цифр данного числа — также делится на 9 (по свойству 3).

Число 375 не делится на 9, так как сумма его цифр $3 + 7 + 5 = 15$ не делится на 9. Это можно доказать следующим образом:

$$375 = 3 \cdot (99 + 1) + 7 \cdot (9 + 1) + 5 = (3 \cdot 99 + 7 \cdot 9) + (3 + 7 + 5),$$

где сумма в первых скобках делится на 9, а во вторых скобках — сумма цифр числа 375 — не делится на 9 (по свойству 4).

Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3.

Например, у числа 375 сумма цифр $3 + 7 + 5 = 15$ делится на 3 и оно само делится на 3, потому что

$$375 = (3 \cdot 99 + 7 \cdot 9) + (3 + 7 + 5),$$

где сумма в первых скобках делится на 3, а во вторых скобках — сумма цифр числа 375 — также делится на 3.

Сумма цифр числа 679, равная $6 + 7 + 9 = 22$, не делится на 3, и само число не делится на 3, потому что

$$679 = (6 \cdot 99 + 7 \cdot 9) + (6 + 7 + 9),$$

где сумма в первых скобках делится на 3, а во вторых скобках — сумма цифр числа 679 — не делится на 3.

Примечание. Когда говорят «число оканчивается цифрой...», имеют в виду «десятичная запись числа заканчивается цифрой...».

- 606.** Сформулируйте признаки делимости на 10, на 5, на 2.
- 607.** Какое число называют чётным? Назовите 6 чётных чисел.
- 608.** Какое число называют нечётным? Назовите 7 нечётных чисел.
- 609.** Сформулируйте признаки делимости на 9, на 3.
- 610.** Какие из чисел 128, 325, 500, 506, 725, 905, 830, 962, 750, 1000, 1262, 2440 делятся на: а) 2; б) 5; в) 2 и 5; г) 10?
- 611.** Напишите шесть чисел, которые делятся на:
а) 2; б) 5; в) 2 и 5; г) 10.
- 612.** а) Напишите все числа от 15 до 95, которые делятся на 10.
б) Напишите все числа от 23 до 46, которые делятся на 5.
в) Напишите все числа от 51 до 73, которые делятся на 2.
- 613.** С помощью цифр 2, 3, 5, 7 (без повторения) запишите все четырёхзначные числа, которые делятся: а) на 2; б) на 5.
- 614.** Можно ли с помощью цифр 1, 2, 5, 6 (без повторения) составить трёхзначное число, которое делилось бы:
а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 10?
- 615.** Покажите, что чётные числа 18, 20, 48, 96 можно записать в виде $2 \cdot k$, где k — некоторое натуральное число.

Доказываем

- * **616.** Докажите, что произведение чётного числа и любого натурального числа есть число чётное.
- * **617.** Докажите, что сумма двух чётных чисел является чётным числом.

- 618.** Покажите, что нечётные числа 7, 9, 5, 13 можно записать в виде $2 \cdot k + 1$, где k — некоторое натуральное число.

Доказываем

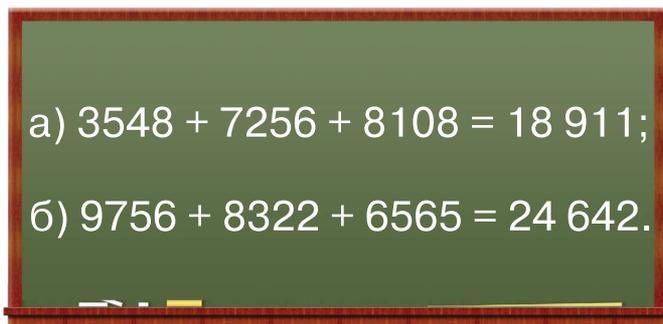
- 619.** Докажите, что сумма двух нечётных чисел является чётным числом.

- 620.** Определите, делится ли число 111 111 111 111 111:
а) на 3; б) на 9.

- 621.** Какую цифру нужно поставить вместо звёздочки, чтобы полученное число делилось на 9:

- а) $4*$; б) $5*$; в) $85*$; г) $738*$;
д) $6*7$; е) $7*2$; ж) $24*0$; з) $2090*?$

- 622.** Ученик выполнил сложение:



а) $3548 + 7256 + 8108 = 18\ 911$;
б) $9756 + 8322 + 6565 = 24\ 642$.

Учитель, не проверяя вычислений, определил, что в обоих примерах допущена ошибка. Как он обнаружил ошибку?

- 623.** Назовите наибольшее и наименьшее шестизначное число, которое делится на: а) 2; б) 3; в) 5; г) 9; д) 10.
- * **624.** Саша купил в магазине 20 тетрадей, 2 альбома для рисования, авторучку за 6 р., несколько карандашей по 60 к. и несколько обложек для книг по 1 р. 20 к. Продавец сказал, что нужно заплатить в кассу 34 р. 25 к. Саша попросил пересчитать стоимость покупки, и ошибка была исправлена. Как он определил, что продавец ошибся в подсчётах?

Доказываем

625. Докажите **признак делимости на 4**: если две последние цифры числа образуют число, делящееся на 4, то и само число делится на 4. (Считайте записи 00, 04 и 08 записями чисел 0, 4 и 8.)

626. Какие из чисел

7928; 3553; 1996; 1795; 7 568 936; 1000; 5700

делятся на 4?

627. Используя признак делимости на 4, определите четыре первых високосных года XXI века.

628. Не выполняя сложения, определите, каким числом (чётным или нечётным) является сумма:

а) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$;

б) $5 + 15 + 25 + 35 + 45 + 55 + 65$;

в) $9 + 29 + 49 + 69 + 89 + 109 + 129 + 149 + 169$.

Доказываем

629. Докажите, что нельзя подобрать:

а) три нечётных числа, сумма которых равна 12;

б) пять нечётных чисел, сумма которых равна 100.

630. Докажите, что:

а) сумма чётного числа нечётных слагаемых чётная;

б) сумма нечётного числа нечётных слагаемых нечётная.

3.3. Простые и составные числа

Каждое натуральное число p делится на 1 и само на себя:

$$p : 1 = p, \quad p : p = 1.$$

Простым числом называют такое натуральное число, которое больше единицы и делится только на 1 и само на себя.

Вот первые десять простых чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Непростые натуральные числа, бóльшие единицы, называют **составными**.

Каждое составное число делится на 1, само на себя и ещё хотя бы на одно натуральное число.

Вот все составные числа, меньшие 20:

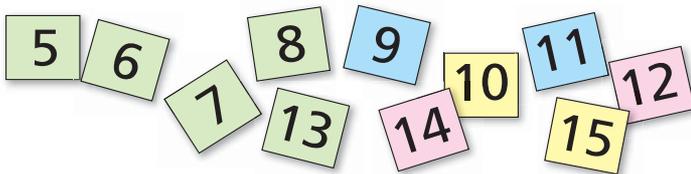
4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18.

Принято считать, что единица не является ни простым, ни составным числом.

Таким образом, множество всех натуральных чисел состоит из простых чисел, составных чисел и единицы.

Простых чисел бесконечно много, есть первое число — 2, но нет последнего простого числа. На форзаце учебника помещена таблица простых чисел, в которой записаны все простые числа от 2 до 997.

- 631.** а) Какое число называют простым?
б) Какое число называют составным?
- 632.** Является ли число 1: а) простым; б) составным?
- 633.** Из каких чисел состоит множество всех натуральных чисел?
- 634.** Назовите наименьшее простое число.
- 635.** На какие числа делится каждое из приведённых ниже чисел?



Какие из этих чисел являются простыми, какие — составными?

- 636.** Используя признаки делимости, докажите, что число:
а) 7690; б) 7395; в) 4256; г) 12 375; д) 12 321 является составным.
- 637.** Не пользуясь таблицей простых чисел, докажите, что число:
а) 29; б) 41; в) 53; г) 59 является простым.
- 638.** С помощью таблицы простых чисел:
а) определите, какие из чисел 47; 69; 127; 301; 447; 517; 673; 879 являются простыми;
б) назовите все простые числа, бóльшие 30, но меньшие 50;
в) назовите все составные числа, бóльшие 30, но меньшие 50.
- 639.** Являются ли простыми числа 998; 999; 1000?

Доказываем

- ✿ **640.** Докажите, что, кроме числа 2, не существует других чётных простых чисел.

Исследуем

- ✿ **641.** Можно ли простое число записать в виде суммы:
- а) двух чётных чисел;
 - б) двух нечётных чисел;
 - в) чётного и нечётного чисел?
- 642.** а) Может ли сумма двух простых чисел быть простым числом?
б) Верно ли, что сумма любых двух простых чисел является простым числом?

- 643.** Некто пообещал дать 99 конфет тому, кто сумеет их разделить между четырьмя людьми так, чтобы каждому досталось нечётное число конфет. Почему этот приз до сих пор никому не удалось получить?

- 644.** В следующих записях замените буквы цифрами так, чтобы полученные числа делились на 3:

- а) $35a25$; б) $4ab40$;
в) $5a2b5$; г) $72ab8$.

Какие из полученных чисел делятся на 5; делятся на 2; делятся на 10; делятся на 4?

- 645.** а) Напишите четырёхзначное число, которое делится на 9. Может ли оно не делиться на 3?
б) Напишите четырёхзначное число, которое делится на 3, но не делится на 9.



3.4. Делители натурального числа

Если натуральное число a делится на натуральное число b , то число b называют делителем числа a .

Например, делителями числа 13 являются числа 1 и 13, делителями числа 4 — числа 1, 2, 4, а делителями числа 12 — числа 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Каждое простое число имеет только два делителя — единицу и само себя, а каждое составное число, кроме единицы и себя, имеет и другие делители.

Если делитель — простое число, то его называют **простым делителем**. Например, число 13 имеет простой делитель 13, число 4 — простой делитель 2, а число 12 — простые делители 2 и 3.

Каждое составное число можно представить в виде произведения его простых делителей. Например:

$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 7;$$

$$81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4;$$

$$22 = 2 \cdot 11;$$

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2.$$

Правые части полученных равенств называют **разложением на простые множители** чисел 28, 22, 81 и 100.

Разложить данное составное число на простые множители — значит представить его в виде произведения различных его простых делителей или их степеней.

Покажем, как можно разложить число 90 на простые множители.

1) 90 делится на 2, $90 : 2 = 45$;

2) 45 не делится на 2, но делится на 3, $45 : 3 = 15$;

3) 15 делится на 3, $15 : 3 = 5$;

4) 5 не делится на 3, но делится на 5, $5 : 5 = 1$.

Таким образом, $90 = 2 \cdot 45 = 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Решение этой задачи коротко записывают так:

90	2	$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.
45	3	
15	3	
5	5	
1		

Все делители числа 90 можно получить из разложения числа 90 на простые множители. Для этого надо взять каждый из простых делителей числа 90, их всевозможные произведения, содержащие не больше одного множителя 2, двух множителей 3 и одного множителя 5. И ещё надо добавить множитель 1. Получатся все делители числа 90:

$$1, 2, 3, 5, 2 \cdot 3 = 6, 3 \cdot 3 = 9, 2 \cdot 5 = 10, 3 \cdot 5 = 15, \\ 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18, 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30, 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45, 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90.$$

И других делителей у числа 90 нет.

- 646.** а) Что называют делителем натурального числа; простым делителем натурального числа?
 б) Что значит разложить число на простые множители?
- 647.** Укажите все делители числа:
 а) 2; б) 6; в) 12; г) 16; д) 18; е) 20;
 ж) 1; з) 48; и) 100; к) 104; л) 121; м) 256.
- 648.** Запишите пять натуральных чисел, имеющих делителями числа:
 а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 9;
 е) 10; ж) 2 и 3; з) 3 и 4; и) 2 и 5; к) 4 и 9.
- 649.** Запишите пять натуральных чисел, не имеющих других простых делителей, кроме: а) 2; б) 3; в) 5; г) 2 и 3; д) 2 и 5.
- 650.** Найдите все делители числа a :
 а) $a = 2 \cdot 3 \cdot 5$; б) $a = 3 \cdot 5 \cdot 7$; в) $a = 3 \cdot 3 \cdot 11$; г) $a = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$.

Решение. а) Число a имеет простые делители: 2, 3 и 5. Другие делители найдём, составляя различные произведения из этих простых делителей: $2 \cdot 3 = 6$; $2 \cdot 5 = 10$; $3 \cdot 5 = 15$; $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Кроме того, число a делится на 1.

Ответ. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

- 651.** Разложите на простые множители число:
 а) 16; б) 18; в) 26; г) 35; д) 48; е) 70;
 ж) 144; з) 210; и) 800; к) 216; л) 343; м) 1024.
- 652.** Представьте данное произведение в виде произведения возможно большего числа множителей, отличных от 1:
 а) $20 \cdot 24$; б) $12 \cdot 25$; в) $164 \cdot 10$; г) $8 \cdot 125$;
 д) $125 \cdot 64$; е) $112 \cdot 147$; ж) $1001 \cdot 37$; з) $47 \cdot 201$.
- 653.** Запишите в порядке возрастания все делители числа:
 а) 12; б) 15; в) 18; г) 24.
- 654.** Выполняя предыдущее задание, можно заметить, что делители числа 18 обладают интересным свойством:

$$1, 2, 3, 6, 9, 18$$

$$1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 = 18.$$

Это наблюдение позволяет сократить перебор чисел при поиске всех делителей числа 18. Сначала перебираем все делители числа 18 до тех пор, пока произведение двух соседних делителей не даст 18: 1, 2, 3, 6. После того как найдена «середина» в ряду делителей, остальные делители найдём делением: $18 : 2 = 9$, $18 : 3 = 6$. Используя этот приём, найдите все делители числа: а) 32; б) 48; в) 56; г) 36; д) 98.

655. Запишите число в виде произведения двух множителей всеми возможными способами:
 а) 32; б) 62; в) 51; г) 100.

656. Разложите на простые множители число:
 а) 10; б) 100; в) 1000; г) 10 000; д) 100 000.

Решение.

д) 100 000	2 · 5
10 000	2 · 5
1000	2 · 5
100	2 · 5
10	2 · 5
1	

$$100\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^5 \cdot 5^5.$$

657. Разложите на простые множители число:
 а) 64; б) 200; в) 288; г) 256;
 д) 333; е) 346; ж) 512; з) 8100;
 и) 4096; к) 2500; л) 888; м) 2525.

658. Определите, является число простым или составным:
 а) 89; б) 123; в) 279; г) 335;
 д) 642; е) 601; ж) 729; з) 835;
 и) 1571; к) 2563; л) 7777; м) 442 233.

659. а) Подберите такие натуральные числа a и b , чтобы выполнялось равенство: $3 \cdot a + 6 \cdot b = 1998$.
 б) Почему нельзя подобрать такие натуральные числа a и b , чтобы выполнялось равенство: $3 \cdot a + 6 \cdot b = 1999$?
 в) Можно ли подобрать такие натуральные числа a и b , чтобы выполнялось равенство: $18 \cdot a + 81 \cdot b = 996$?

660. а) Представьте число 8 в виде произведения нескольких множителей так, чтобы сумма этих множителей была равна 8.
 б) Представьте число 35 в виде произведения нескольких множителей так, чтобы сумма этих множителей была равна 35.

661. а) Вася считает, что любое простое число можно записать в виде суммы натуральных чисел, произведение которых является простым числом. Подтверждая своё мнение, он приводит примеры:

$$3 = 2 + 1, \quad 2 \cdot 1 = 2 \text{ — простое число,}$$

$5 = 3 + 1 + 1, \quad 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$ — простое число и т. п. Приведите контр-пример, показывающий, что Вася не прав.

б) Как исправить утверждение Васи, чтобы оно стало верным?

3.5. Наибольший общий делитель

Число 12 имеет делители 1, 2, 3, 4, 6, 12. Число 54 имеет делители 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54. Мы видим, что числа 12 и 54 имеют **общие делители** 1, 2, 3, 6. Говорят ещё, что множество делителей числа 12 состоит из 6 элементов — чисел 1, 2, 3, 4, 6, 12, а множество делителей числа 54 состоит из 8 элементов — чисел 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54. При этом общая часть этих множеств (**пересечение множеств**) состоит из 4 элементов — чисел 1, 2, 3, 6.

Наибольшим общим делителем чисел 12 и 54 является число 6.

Наибольший общий делитель чисел a и b обозначают: НОД (a , b).

Например, пишут: НОД (12, 54) = 6.

Рассмотрим примеры нахождения наибольшего общего делителя.

Пример 1. Найти НОД (180, 336).

Разложим числа 180 и 336 на простые множители:

180	2	336	2	
90	2	168	2	
45	3	84	2	Итак, $180 = \underline{1} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 5 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$;
15	3	42	2	$336 = \underline{1} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 7 = 1 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 7$.
5	5	21	3	
1		7	7	
		1		

В разложении чисел 180 и 336 подчёркнуты все их общие делители, поэтому НОД (180, 336) = $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Пример 2. Найти НОД (56, 45).

Разложим числа 56 и 45 на простые множители:

56	2	45	3	
28	2	15	3	$56 = \underline{1} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 7$; $45 = \underline{1} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 5$.
14	2	5	5	НОД (56, 45) = 1.
7	7	1		
1				

Числа, не имеющие общих простых делителей, называют **взаимно простыми числами**.

Наибольший общий делитель взаимно простых чисел равен 1. Например, числа 56 и 45 взаимно простые: НОД (56, 45) = 1.

Отметим, что два различных простых числа (например, 17 и 23), а также два соседних натуральных числа (например, 24 и 25) являются взаимно простыми.

Если одно из двух чисел делится нацело на другое, то наибольший общий делитель этих чисел равен меньшему из них. Например, 12 делится на 4, следовательно, НОД (12, 4) = 4.

- 662.** а) Какие числа называют взаимно простыми? Приведите примеры взаимно простых чисел.
б) Чему равен наибольший общий делитель взаимно простых чисел?
в) Известно, что число a делится нацело на число b . Чему равен НОД (a, b)?

663. Найдите все делители чисел 45 и 60. Найдите все общие делители чисел 45 и 60.

664. Найдите:

- а) НОД (30, 36); б) НОД (50, 45); в) НОД (42, 48);
г) НОД (120, 150); д) НОД (124, 93); е) НОД (46, 69).

665. Найдите:

- а) НОД (24, 48); б) НОД (62, 31); в) НОД (132, 11);
г) НОД (256, 32); д) НОД (45, 15); е) НОД (21, 63).

666. Число 12 321 делится на 111. Найдите НОД (12 321, 111).

667. Найдите:

- а) НОД (14, 7); б) НОД (26, 13); в) НОД (48, 8);
г) НОД (64, 16); д) НОД (45, 9); е) НОД (11, 66).

668. С помощью разложения чисел на простые множители докажите, что являются взаимно простыми числа:

- а) 24 и 35; б) 56 и 99; в) 63 и 88; г) 12 и 25; д) 32 и 33.

669. Найдите:

- а) НОД (13, 5); б) НОД (3, 11); в) НОД (29, 19);
г) НОД (54, 55); д) НОД (62, 63); е) НОД (98, 99).

Доказываем

670. Докажите, что два простых числа являются взаимно простыми.

671. Докажите, что два соседних натуральных числа являются взаимно простыми.

672. Придумайте пять пар таких чисел a и b , чтобы НОД (a, b) = 1.

673. Найдите:

- а) НОД (320, 40); б) НОД (233, 79); в) НОД (278; 279);
г) НОД (484, 44); д) НОД (84, 96); е) НОД (100; 175).

- 674.** Ученик нашёл НОД (33, 198) и получил 66. Не проверяя вычислений, учитель определил, что была допущена ошибка. Как он это сделал?
- ***675.** Объясните, почему наибольший общий делитель двух чисел:
 а) не может быть больше одного из этих чисел;
 б) делится на все общие делители этих чисел.
- ***676.** Даны разложения чисел a и b на простые множители. Найдите НОД (a , b).
 а) $a = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2$, $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$;
 б) $a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^3$, $b = 2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 19^2$.
- 677.** Найдите:
 а) НОД (1, 48); б) НОД (15, 55); в) НОД (182, 82);
 г) НОД (100, 25); д) НОД (1000, 125); е) НОД (121, 11).
- 678.** Для участия в эстафете нужно разделить 36 девочек и 24 мальчика на команды с одинаковым числом участников, состоящие только из мальчиков или только из девочек. Какое наибольшее число участников может быть в каждой команде? Сколько команд получится?
- 679.** Для новогодних подарков приготовили 184 мандарина и 138 яблок. В какое наибольшее число подарков можно разложить все эти мандарины и яблоки так, чтобы во всех подарках было поровну мандаринов и поровну яблок?

3.6. Наименьшее общее кратное

Число, делящееся на 12, называют **кратным** числу 12. Числу 12 кратны числа 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 и т. д. Числу 18 кратны числа 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126 и т. д.

Мы видим, что имеются числа, кратные одновременно 12 и 18. Например, 36, 72, 108, ... Эти числа называются **общими кратными** чисел 12 и 18.

Наименьшим общим кратным натуральных чисел a и b называют наименьшее натуральное число, делящееся нацело на каждое из чисел a и b . Это число обозначают: НОК (a , b).

Наименьшее общее кратное двух чисел обычно находят одним из двух способов. Рассмотрим их.

Найдём НОК (18, 24).

I способ. Будем выписывать числа, кратные 24 (большему из данных чисел), проверяя, делится ли каждое из них на 18:

$24 \cdot 1 = 24$ — не делится на 18,

$24 \cdot 2 = 48$ — не делится на 18,
 $24 \cdot 3 = 72$ — делится на 18, поэтому
 $\text{НОК}(24, 18) = 72$.

II способ. Разложим числа 24 и 18 на простые множители:

$$24 = 2^3 \cdot 3, \quad 18 = 2 \cdot 3^2.$$

$\text{НОК}(24, 18)$ должно делиться и на 24, и на 18. Поэтому искомое число содержит все простые делители большего числа 24 (т. е. числа 2, 2, 2, 3) и ещё множители из разложения меньшего числа 18, которых нет в разложении бóльшего числа (т. е. ещё одно число 3). Поэтому

$$\text{НОК}(18, 24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72.$$

Так как взаимно простые числа не имеют общих простых делителей, то их наименьшее общее кратное равно произведению этих чисел. Например, 24 и 25 — взаимно простые числа. Поэтому

$$\text{НОК}(24, 25) = 24 \cdot 25 = 600.$$

Если одно из двух чисел делится нацело на другое, то наименьшее общее кратное этих чисел равно большему из них. Например, 120 делится нацело на 24, следовательно, $\text{НОК}(120, 24) = 120$.

680. Чему равно наименьшее общее кратное взаимно простых чисел?

681. Найдите несколько чисел, кратных 10, и несколько чисел, кратных 15. Найдите несколько общих кратных чисел 10 и 15. Чему равно наименьшее общее кратное чисел 10 и 15?

682. Найдите:

- а) $\text{НОК}(6, 8)$; б) $\text{НОК}(15, 25)$; в) $\text{НОК}(16, 12)$;
г) $\text{НОК}(48, 42)$; д) $\text{НОК}(35, 20)$; е) $\text{НОК}(56, 63)$.

683. Найдите:

- а) $\text{НОК}(6, 12)$; б) $\text{НОК}(40, 8)$; в) $\text{НОК}(51, 17)$;
г) $\text{НОК}(33, 3)$; д) $\text{НОК}(34, 2)$; е) $\text{НОК}(16, 48)$.

684. Число 123 454 321 делится на 11 111. Найдите наименьшее общее кратное этих чисел, не выполняя разложения чисел на простые множители.

685. Найдите:

- а) $\text{НОК}(135, 5)$; б) $\text{НОК}(120, 10)$; в) $\text{НОК}(432, 2)$;
г) $\text{НОК}(234, 9)$; д) $\text{НОК}(123, 3)$; е) $\text{НОК}(16, 64)$.

686. Известно, что число a делится нацело на число b . Чему равно $\text{НОК}(a, b)$?

- 687.** Являются ли взаимно простыми числа:
- а) 12 и 25; б) 40 и 39; в) 55 и 42;
 г) 22 и 51; д) 48 и 49; е) 39 и 50;
 ж) 17 и 48; з) 11 и 45; и) 13 и 50?

Найдите наименьшее общее кратное этих чисел.

- 688.** Найдите:
- а) НОК (4, 5); б) НОК (3, 11); в) НОК (7, 8);
 г) НОК (9, 10); д) НОК (5, 13); е) НОК (17, 3);
 ж) НОК (13, 11); з) НОК (10, 11); и) НОК (19, 20).

- 689.** Напишите пять пар чисел a и b , чтобы $\text{НОК}(a, b) = a$.

- 690.** Найдите:
- а) НОК (36, 48); б) НОК (49, 50); в) НОК (14, 15);
 г) НОК (99, 100); д) НОК (28, 21); е) НОК (24, 23).

- 691.** Найдите:
- а) НОК (19, 10); б) НОК (11, 110); в) НОК (26, 52);
 г) НОК (11, 23); д) НОК (88, 66); е) НОК (198, 9).

- 692.** Ученица нашла НОК (33, 198) и получила 99. Не проверяя вычислений, учитель определил, что была допущена ошибка. Как он это сделал?



- 693.** Объясните, почему наименьшее общее кратное двух чисел:
- а) не может быть меньше любого из этих чисел;
 б) делится на все делители этих чисел.

- 694.** Даны разложения чисел a и b на простые множители, найдите НОД (a, b) и НОК (a, b).

а) $a = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$, б) $a = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$,
 $b = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2$; $b = 3^2 \cdot 5^3$.

(Для решения задачи достаточно составить произведение и не вычислять его.)

- 695.** Убедитесь, что $\text{НОД}(36, 24) \cdot \text{НОК}(36, 24) = 36 \cdot 24$. Выполняется ли это свойство для других пар чисел?

Доказываем

- 696.** Докажите, что $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b$:
- а) для взаимно простых чисел;
 б) для любых чисел.

697. Какой наименьшей длины может быть верёвка, чтобы её можно было разрезать без остатков на куски:

- а) как по 4 м, так и по 5 м;
- б) как по 4 м, так и по 6 м?

698. Мальчик хочет купить несколько пачек мороженого по 8 р., но у него только 5-рублёвые монеты, а у продавца нет сдачи. Какое наименьшее число пачек мороженого он может купить?

699. Из двух сцепленных шестерёнок одна имеет 16 зубцов, а другая — 28 зубцов. До начала вращения шестерёнок соприкасающиеся зубцы пометили мелом. Через какое наименьшее число оборотов каждой шестерёнки метки будут совпадать?



ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ 3

1 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧЁТНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Использование идеи чётности позволяет решать разнообразные задачи, в условии которых ничего не говорится о чётности.

Задача 1. Можно ли разменять 20 р. семью монетами, достоинство каждой из которых 1 р. или 5 р.?

Если взять любые две монеты, то получится чётное число рублей:

$$1 + 1 = 2, \quad 1 + 5 = 6, \quad 5 + 5 = 10,$$

поэтому любые шесть монет дают чётное число рублей. Если же добавить седьмую монету (достоинством 1 р. или 5 р.), то получится нечётное число рублей. Следовательно, 20 р. нельзя разменять семью монетами по 1 р. и 5 р.

В рассмотренной задаче требуется чётное число (20) представить в виде суммы нечётного числа (7) нечётных слагаемых (1 и 5). Сделать это невозможно, как и показано выше.

Задача 2. Имеется 13 палочек. Некоторые из них разломали или на 3, или на 5 частей. Затем некоторые из палочек опять разломали или на 3, или на 5 частей, и так несколько раз. Можно ли после нескольких таких операций получить 100 палочек?

Здесь не сказано, сколько палочек разламывали на части каждый раз и на сколько именно частей, поэтому перебор всех возможных вариантов довольно сложен.

Если одну палочку разломать на 3 части, то палочек станет на 2 больше, а если одну палочку разломать на 5 частей, то палочек станет на 4 больше. Разламывая палочку или на 3, или на 5 частей, мы увеличиваем их общее число или на 2, или на 4 палочки, т. е. на чётное число палочек.

Первоначальное число палочек 13 — нечётное, и, добавляя к нему каждый раз чётное число палочек, невозможно получить чётную сумму 100, так как сумма нечётного и чётного чисел нечётная.

Задача 3. Можно ли, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды, нарисовать одним росчерком:

- а) распечатанный конверт (рис. 134);
- б) нераспечатанный конверт (рис. 135)?

Нарисовать, соблюдая условия задачи, распечатанный конверт умеют многие пятиклассники, а вот нарисовать нераспечатанный конверт не удалось ещё никому. В чём тут дело? Обратим внимание на то, что в одних точках сходится чётное число линий (назовём их чётными узлами), а в других — нечётное число линий (назовём их нечётными узлами).

Отметим, что если узел нечётный, то в нём обязательно должно или начинаться, или заканчиваться рисование линии (рис. 136).

Если же узел чётный, то в нём не обязательно начинать или заканчивать рисование линии — его можно пройти один или несколько раз, но если всё же в нём начать рисование линии, то в нём же нужно и закончить (рис. 137).

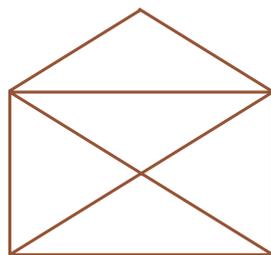


Рис. 134

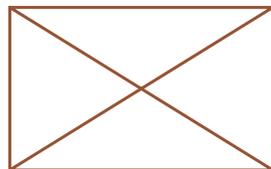


Рис. 135

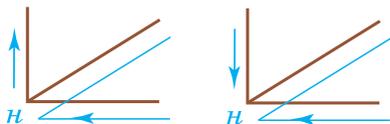


Рис. 136

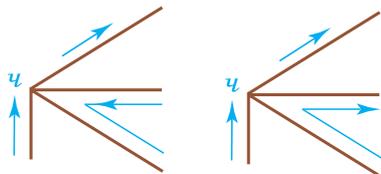


Рис. 137

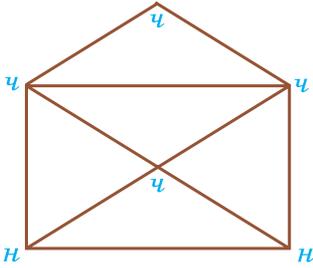


Рис. 138

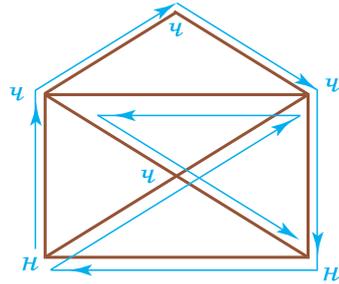


Рис. 139

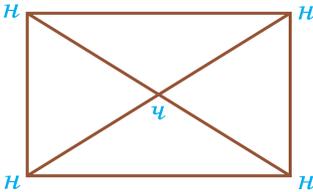


Рис. 140

Если на рисунке 134 отметить чётные и нечётные узлы соответственно буквами «ч» и «н», то получится рисунок 138.

На нём всего два нечётных узла, поэтому, начав рисование в одном из них и пройдя по всем линиям по одному разу, закончим рисование в другом нечётном узле. Так как на рисунке 138 имеется два нечётных узла и у линии, которую мы рисуем, одно начало и один конец, то распечатанный конверт можно нарисовать, соблюдая условия задачи (на рисунке 139 стрелками показано направление движения карандаша).

Если на рисунке 135 отметить чётные и нечётные узлы соответственно буквами «ч» и «н», то получится рисунок 140, на котором нечётных узлов больше двух. Начав рисование линии в одном из них, невозможно его закончить во всех остальных нечётных узлах одновременно, так как искомая линия имеет одно начало и один конец. Поэтому нераспечатанный конверт нельзя нарисовать, соблюдая условия задачи.

700. Вася записал на листе бумаги несколько нечётных чисел. Петя их не видел, но утверждает, что по количеству записанных чисел легко определит, чётная или нечётная у них сумма. Прав ли Петя?

701. Некто утверждает, что знает 4 натуральных числа, произведение и сумма которых нечётные числа. Не ошибается ли он?

***702.** Имеется 9 листов бумаги. Некоторые из них разорвали или на 7, или на 9 частей. Некоторые из образовавшихся частей разорвали или на 7, или на 9 частей, и так несколько раз. Можно ли после нескольких таких операций получить 100 частей?

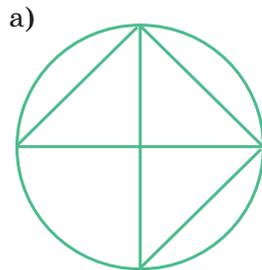
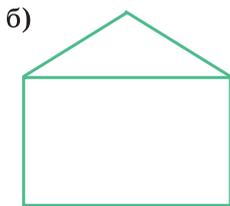


Рис. 141

***703.** Записано четыре числа: 0, 0, 0, 1. За один ход разрешается прибавить 1 к любым двум из этих чисел. Можно ли за несколько ходов получить 4 равных числа?

***704.** В шести коробочках лежат деньги. В первой 1 р., во второй 2 р., в третьей 3 р. и т. д., в шестой 6 р. За один ход разрешается в любые две коробочки добавить по 1 р. Можно ли за несколько ходов уравнять суммы в коробочках?

705. Не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды, нарисуйте фигуры, изображённые на рисунке 141.

706. Не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды, попробуйте нарисовать фигуры, изображённые на рисунке 142.

707. В задании 706 вам не удалось нарисовать две последние фигуры. Оказывается, этот результат зависит от числа «нечётных» узлов фигуры, в которых сходится нечётное число линий. Сколько «нечётных» узлов должно быть, чтобы фигуру можно было нарисовать?

708. Какую из фигур, изображённых на рисунке 143, нельзя нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды?

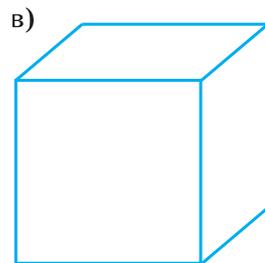
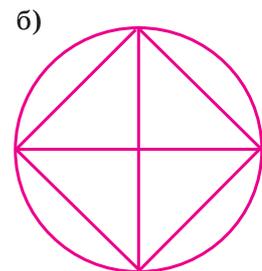


Рис. 142

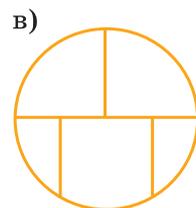
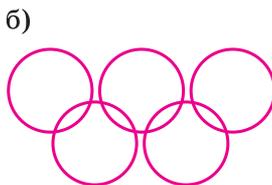


Рис. 143

709. Придумайте свои фигуры, которые можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды.

***710.** Почтальон разнёс почту во все дома деревни, после чего зашёл с посылкой к Феде. На рисунке 144 показаны все тропинки, по которым проходил почтальон, причём, как оказалось, ни по одной из них он не проходил дважды. В каком доме живёт Федя? Каков мог быть маршрут почтальона?

***711.** Экскурсоводу нужно выбрать маршрут по залам музея так, чтобы обойти все залы, не проходя ни через одну дверь дважды. Где нужно начать и где закончить осмотр? Найдите один из возможных маршрутов (рис. 145).

***712.** *Задача Л. Эйлера.* Можно ли поочередно обойти все семь мостов г. Кёнигсберга (ныне Калининград), соединяющих районы этого города с островами на реке Прегель (рис. 146), проходя по каждому мосту только один раз?

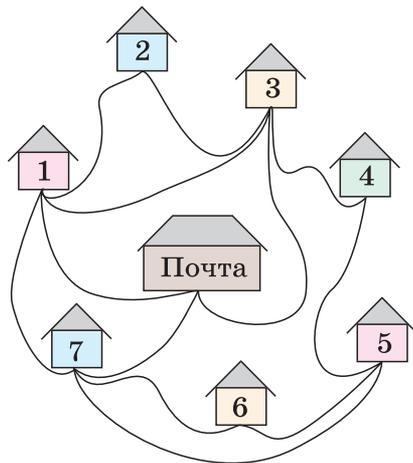


Рис. 144

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Рис. 145

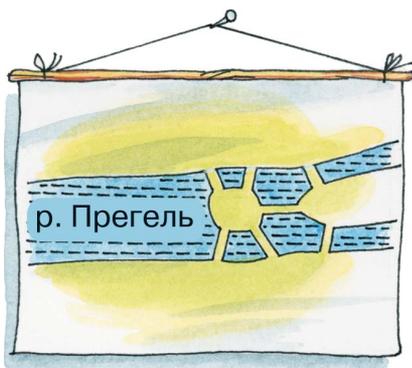


Рис. 146

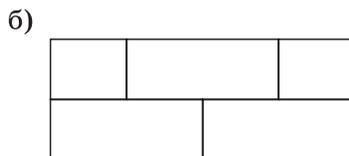
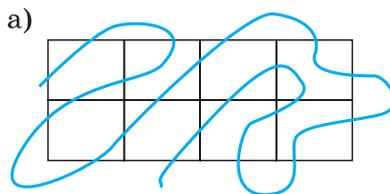


Рис. 147

713. На рисунке 147, а линия проведена так, чтобы она пересекала каждую сторону каждого маленького прямоугольника только один раз. Можно ли такую линию нарисовать на рисунке 147, б? Если можно, то покажите как, если нельзя, то объясните почему.

2 ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ



В старину на Руси говорили: «Умножение — моё мучение, а деление — беда». Тот, кто умел быстро и безошибочно делить, считался большим математиком — ведь в школах тогда учили только сложению, вычитанию и таблице умножения.

Делимость натуральных чисел интересовала математиков уже в глубокой древности. Особое внимание они уделяли простым числам. Ведь эти числа входят множителями в любое составное число — «составляют» его. Поэтому очень важно узнать тайны простых чисел — сколько их, как они распределены в натуральном ряду и т. д.

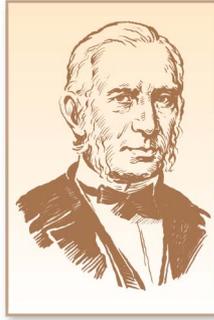
В книге «Начала» древнегреческого учёного Евклида (III в. до н. э.) доказано, что простых чисел бесконечно много. В этой же книге указан способ (алгоритм) нахождения НОД двух натуральных чисел.

Во II веке до н. э. другой древнегреческий математик — Эратосфен предложил довольно лёгкий способ отыскания простых чисел. Немного изменяя способ Эратосфена, запишем числа от 1 до 100 в таблицу по 6 чисел в строке. 1 не простое число и не составное — вычёркнем его. Число 2 простое — обведём его кружком, а все числа, кратные ему (они стоят во втором, четвёртом и шестом столбцах), вычёркнем. Первое из незачёркнутых чисел 3. Оно простое — обведём его кружком, а все

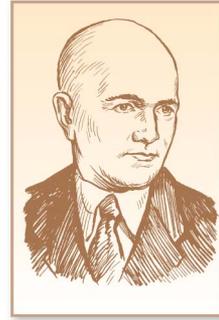
1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100		



Л. Эйлер



П. Л. Чебышёв



И. М. Виноградов

незачёркнутые числа, кратные ему (они стоят в третьем столбце), вычеркнем. Теперь первое из незачёркнутых чисел 5. Оно простое — обведём его кружком, а все незачёркнутые числа, кратные ему (они расположены на параллельных прямых), вычеркнем. После вычёркивания из таблицы чисел, кратных 7 (они также расположены на параллельных прямых), в ней останутся только простые числа — они тоже обведены кружком.

Аналогичные рассуждения можно провести, если взять больше 100 чисел. При этом в таблице как бы просеиваются составные числа и остаются только простые. Эратосфен записывал свою таблицу на папирусе, натянутом на рамку, и составные числа прокалывал. Получалось своеобразное числовое сито, через которое составные числа просеивались, а простые оставались. Поэтому таблицу и сам способ стали называть «решетом» Эратосфена. Он позволяет сократить объём работы при составлении таблицы простых чисел.

С древнейших времён математики пытались понять, как расположены простые числа в натуральном ряду, и найти общую формулу для нахождения простых чисел. Например, если в формулу $P = n^2 - n + 41$ подставлять вместо n натуральные числа 1, 2, 3, 4, ..., 40, то будут получаться простые числа:

$$\text{при } n = 1 \quad P = 1^2 - 1 + 41 = 41, \quad \text{при } n = 2 \quad P = 2^2 - 2 + 41 = 43,$$

$$\text{при } n = 3 \quad P = 3^2 - 3 + 41 = 47, \quad \text{при } n = 4 \quad P = 4^2 - 4 + 41 = 53 \text{ и т. д.}$$

Но общей формулы простых чисел пока не найдено. Начиная с некоторого номера n , формулы перестают «работать». Если взять $n = 41$, то по рассмотренной формуле получится $P = 41^2 - 41 + 41$ — составное число, делящееся на 1, 41, 41^2 .

Великий математик, академик Петербургской академии наук Л. Эйлер (1707—1783), уделял большое внимание вопросам дели-

мости — это ему принадлежит формула $P = n^2 - n + 41$. Л. Эйлер рассматривал и такую задачу: «Определить, сколько простых чисел содержится между двумя данными натуральными числами, не пересчитывая их непосредственно».

Этой задачей в дальнейшем занимались многие крупные математики всего мира. Большой вклад в её решение внёс великий русский математик академик П. Л. Чебышёв (1821—1894), доказавший, в частности, что между числами n и $2n$ ($n > 1$) имеется по крайней мере одно простое число.

Л. Эйлер более двухсот лет назад сформулировал гипотезу, называемую проблемой Эйлера: «Доказать, что каждое чётное число, начиная с 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел».

Проблема Эйлера не решена до настоящего времени.

Более двухсот лет назад член Петербургской академии наук Х. Гольдбах (1690—1764) сформулировал гипотезу — проблему Гольдбаха: «Доказать, что каждое нечётное число, большее 5, можно представить в виде суммы трёх простых чисел».

В 1937 году выдающийся русский математик академик И. М. Виноградов (1891—1983) доказал, что проблема Гольдбаха верна для всех достаточно больших чисел. Но в общем виде эта задача не решена до сих пор.

3 АНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

ИССЛЕДУЕМ

- 714.** а) Почему после «просеивания» чисел, кратных 2, 3, 5, 7, в таблице натуральных чисел от 1 до 100 остались только простые числа?
б) На каком числе следует остановить «просеивание», если в таблице будет 150; 10 000 первых натуральных чисел?
в) Используя «решето» Эратосфена, получите все простые числа в промежутке от 1 до 200.
- 715.** а) Петя придумал новую формулу для нахождения простых чисел: $P = n^2 + n + 41$. Для любых ли натуральных n число P простое?
б) Сколько различных простых чисел можно получить по формуле $P = n^2 + n + 41$, если брать последовательные натуральные числа, начиная с $n = 1$?

716. Если в одной руке кто-нибудь спрячет пятирублёвую, а в другой — двухрублёвую монету, то я могу легко определить, в какой руке спрятана двухрублёвая монета. Для этого я попрошу умножить число рублей в правой руке на 2, в левой — на 3 и результаты сложить, а мне сообщить лишь, является сумма чётной или нет. Если сумма чётная, то двухрублёвая монета в левой руке, если нечётная, то в правой. Разгадайте секрет фокуса.

Отметим, что:

- 1) для данного фокуса подойдут и другие монеты: рублёвая и двухрублёвая, пятирублёвая и десятирублёвая, но не подойдут рублёвая и пятирублёвая монеты;
- 2) умножать можно на 2 и 5, на 4 и 5, на 6 и 9, но нельзя на 3 и 5.

Научитесь выполнять этот фокус.

717. Найдите все числа вида $\overline{5a4b}$, кратные 36.

718. Я предлагаю товарищу записать (так, чтобы я не видел) любое трёхзначное число, состоящее из различных цифр (без нуля). Пусть он теперь переставит цифры этого числа в любом порядке и получит новое число. Пусть меньшее из этих двух чисел он вычтет из большего числа, зачеркнёт одну цифру в полученной разности и назовёт мне сумму незачёркнутых цифр. Тогда я могу легко определить, какую цифру зачеркнул мой товарищ. Объясните с помощью признака делимости на 9 этот фокус.

719. Вася увидел в тетради старшего брата странную, как ему показалось, запись: 5!.

— Что это за восклицательный знак? — спросил он.

— Это не восклицательный знак. Запись 5! читается «5 факториал» и означает произведение натуральных чисел от 1 до 5. А для любого натурального числа n ($n > 1$) запись $n!$ читается «эн факториал» и означает произведение натуральных чисел от 1 до n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Считается, что

$$1! = 1.$$

Вычислите 2!, 3!, 4!, 5!, 7!.

Доказываем

720. Докажите, что:

- а) $99 \cdot 99! + 99! = 100!$;
- б) $1000! - 999! = 999 \cdot 999!$.

- 721.** Старший брат выписал из справочника число 15! (см. задачу 719), а Вася случайно поставил в его тетради кляксу на одну цифру. Вот что из этого получилось:



Определите пропавшую цифру без справочника и не вычисляя произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 15$.

- 722.** а) Имеются ли среди чисел $2!$, $3!$, $4!$, $5!$, $6!$, $7!$, ... (см. задачу 719) взаимно простые числа?
 б) Чему равен наибольший общий делитель чисел $100!$ и $50!$?
 в) Чему равно наименьшее общее кратное чисел $100!$ и $50!$?

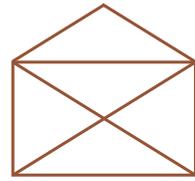


Рис. 148

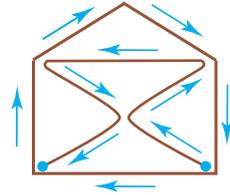


Рис. 149

- 723.** Задачи на рисование линии по указанным ранее правилам можно усложнить. Пусть требуется нарисовать фигуру таким образом, чтобы линия не пересекала себя. Например, «конверт», изображённый на рисунке 148, можно нарисовать, как на рисунке 149.

Нарисуйте фигуру (рис. 150), не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одной линии дважды так, чтобы линия не пересекала себя ни в одной точке.

Указание. Фигуру следует раскрасить «в шахматном порядке», отсоединить закрасненные области друг от друга так, чтобы каждая из них имела не больше одной общей точки с какой-либо другой закрасненной областью. Остаётся обвести закрасненные и незакрасненные области по периметру (рис. 151).

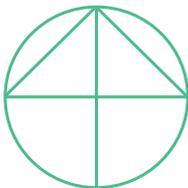


Рис. 150

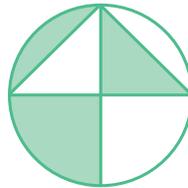
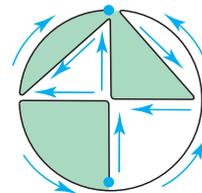


Рис. 151



724. Нарисуйте по правилам, приведённым в задаче 723, фигуру, изображённую на рисунке 152.

***725.** Нарисуйте по тем же правилам (см. задачу 723) фигуру, изображённую на рисунке 153.

726. Придумайте свои фигуры, которые можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, не проводя по линии дважды и без самопересечений.

727. Головоломка. Имеется 3 штырька, на один из которых насажены 3 кольца (рис. 154). За сколько ходов можно перенести пирамиду из этих трёх колец на другой штырёк, если за один ход разрешается переносить только одно кольцо; при этом нельзя большее кольцо класть на меньшее. Решите задачу: а) для четырёх колец; б) для пяти колец.

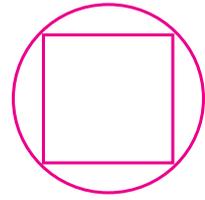


Рис. 152

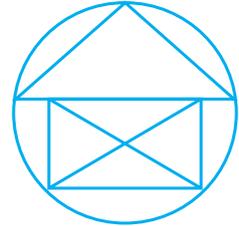
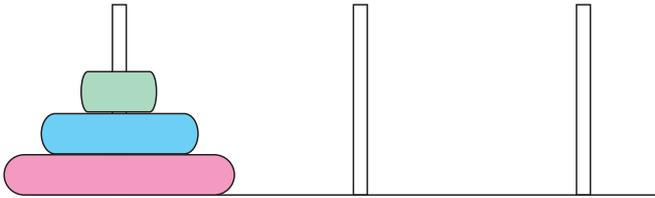


Рис. 153

Рис. 154



ГЛАВА 4

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

При изучении главы 4 вам предстоит освоить обыкновенные дроби. Вы научитесь их сравнивать, выполнять с ними четыре арифметических действия, применять законы сложения и умножения для упрощения вычислений. Эти умения будут использоваться не только в 5—6 классах, но и при изучении алгебры, физики и других школьных предметов в старших классах. В главе 4 вам встретятся задачи «на дроби» и «на совместную работу», среди которых есть интересные старинные задачи.

4.1. Понятие дроби

Если отрезок длиной 1 см разделить на две равные части, то каждая из них будет иметь длину, равную половине сантиметра. Это записывают так: $\frac{1}{2}$ см.

Если 1 кг сахара рассыпать поровну в четыре пакета, то каждый из них будет иметь вес, равный четверти килограмма. Это записывают так: $\frac{1}{4}$ кг.

Напомним, что в повседневной жизни слово «масса» заменяют словом «вес».

Если буханку хлеба весом 1 кг разрезать на три равные по весу части — каждая по трети килограмма ($\frac{1}{3}$ кг), то две такие

части будут иметь вес, равный двум третьим килограмма. Это записывают так: $\frac{2}{3}$ кг. Если же буханку разрезать на 4 равные части, то 3 такие части будут весить три четверти килограмма. Это записывают так: $\frac{3}{4}$ кг.

Если на отрезке AB ровно три раза укладывается отрезок длиной $\frac{1}{4}$ дм, то длина отрезка AB равна трём четвёртым дециметра: $\frac{3}{4}$ дм.

Записи $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ... называют **обыкновенными дробями** или, короче, **дробями**.

Дробь $\frac{1}{2}$ означает половину, или одну вторую часть единицы (миллиметра, килограмма, часа и т. п.). Дробь $\frac{1}{3}$ означает одну третью часть единицы. Дробь $\frac{2}{3}$ означает две третьих части единицы.

Такой же смысл имеют дроби $\frac{5}{6}$ — пять шестых, $\frac{7}{11}$ — семь одиннадцатых, $\frac{5}{4}$ — пять четвёртых и т. д.

Если q — натуральное число, то дробь $\frac{1}{q}$ (читается «одна кутая») означает одну кутую часть единицы. Если p и q — натуральные числа, то дробь $\frac{p}{q}$ (читается «пэ кутых») означает пэ кутых части единицы.

Например, если 1 км разделить на q равных частей, то каждая часть будет иметь длину $\frac{1}{q}$ км, а p таких частей будут иметь длину $\frac{p}{q}$ км.

Число, которое можно записать в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа, называют **рациональным числом**.

Все такие числа составляют **множество положительных рациональных чисел**.

Для упрощения речи вместо слов «рациональное число $\frac{p}{q}$ » говорят «дробь $\frac{p}{q}$ ».

Число p , находящееся над чертой дроби, называют **числителем дроби** $\frac{p}{q}$; число q , находящееся под чертой, называют **знаменателем дроби** $\frac{p}{q}$.

Дробь с числителем p и знаменателем 1 есть другая форма записи натурального числа p :

$$\frac{p}{1} = p.$$

Например, $\frac{5}{1} = 5$; $\frac{7}{1} = 7$; $\frac{1}{1} = 1$.

Таким образом, множество всех натуральных чисел содержится в множестве положительных рациональных чисел.

- 728.** а) Сколько граммов в половине килограмма?
б) Сколько часов в одной трети суток?
в) Сколько килограммов в четверти тонны?
г) Сколько метров в одной восьмой километра?
д) Сколько минут в четверти часа?

- 729.** а) Сколько миллиметров в $\frac{1}{2}$ сантиметра?
б) Сколько минут в $\frac{1}{3}$ часа?
в) Сколько сантиметров в $\frac{1}{4}$ метра?
г) Сколько граммов в $\frac{1}{5}$ килограмма?

- 730.** а) Какую часть часа составляет одна минута?
б) Какую часть сантиметра составляет один миллиметр?
в) Какую часть гектара составляет один ар?
г) Какую часть градуса составляет одна минута?
д) Какую часть 1 см^2 составляет 1 мм^2 ?
е) Какую часть 1 м^3 составляет 1 дм^3 ?

- 731.** а) Купили 100 м лески. Половину всей лески намотали на катушки. Сколько метров лески осталось?
б) От мотка провода длиной 36 м отмотали его четвертую часть. Сколько метров провода осталось в мотке?

- 732.** Сколько сантиметров в: а) $\frac{1}{2}$ м; б) $\frac{1}{5}$ м; в) $\frac{1}{10}$ м; г) $\frac{1}{25}$ м?

- 733.** На рисунке 155 изображены часы.
- а) Какая часть окружности заключена между часовой и минутной стрелками, считая от минутной стрелки к часовой по их ходу, в 6 ч 00 мин; в 3 ч 00 мин?
- б) Какую часть окружности пройдёт конец минутной стрелки: за 30 мин; за 15 мин; за 20 мин; за 45 мин; за 40 мин?
- в) Какую часть часа составляет: 10 мин; 5 мин; 25 мин; 55 мин?



Рис. 155

- 734.** Перечертите в тетрадь квадрат 4×4 клетки (рис. 156). Закрасьте: а) $\frac{1}{2}$ квадрата; б) $\frac{1}{4}$ квадрата; в) $\frac{1}{8}$ квадрата.

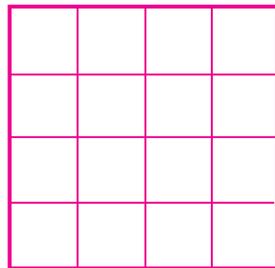


Рис. 156

- 735.** На рисунке 157 отрезок AB разделён на 6 равных частей. Какую часть отрезка AB составляет отрезок AD ?

- 736.** Постройте отрезок длиной 6 см. Отметьте $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{6}$ этого отрезка.

- 737.** Постройте отрезок $AB = 6$ см. Постройте отрезок CD , равный:
- а) $\frac{1}{2}AB$; б) $\frac{1}{3}AB$; в) $\frac{2}{3}AB$.

- 738.** Постройте отрезок $AB = 15$ см. Отметьте на этом отрезке точки C , D , M так, чтобы $AC = \frac{1}{3}AB$; $AD = \frac{1}{5}AB$; $AM = \frac{2}{3}AB$.

- 739.** а) Какую часть от 12 см составляет: 6 см; 3 см; 4 см; 1 см?
б) Какую часть от 42 см составляет: 6 см; 7 см; 14 см?

- 740.** Отрез ткани длиной 15 м разрезали на 5 равных частей. Запишите в виде дроби, какую часть отрезка составляет: одна такая часть; две части; три части; четыре части; пять частей. Запишите длины получаемых при этом частей отрезка.

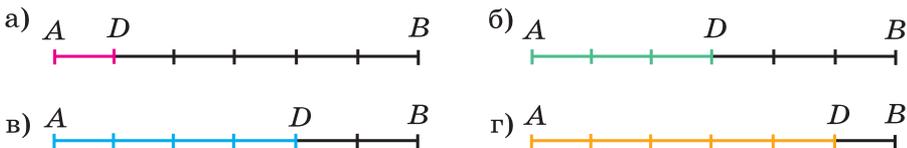


Рис. 157

741. а) Потратили $\frac{1}{2}$ от 400 р. Сколько рублей потратили?

б) Длина верёвки 27 м. Отрезали $\frac{1}{3}$ её длины. Сколько метров верёвки отрезали?

в) От каната длиной 100 м отрезали $\frac{3}{4}$ его длины. Сколько метров каната отрезали? Сколько метров осталось?

742. Сколько граммов содержат:

а) $\frac{3}{10}$ кг; б) $\frac{5}{100}$ кг; в) $\frac{3}{4}$ кг; г) $\frac{3}{5}$ кг?

743. Чему равна:

а) $\frac{1}{2}$ от 50; б) $\frac{1}{3}$ от 45; в) $\frac{1}{4}$ от 120;
г) $\frac{1}{10}$ от 10; д) $\frac{1}{20}$ от 80; е) $\frac{1}{30}$ от 90?

744. Вычислите:

а) $\frac{2}{3}$ от 12; б) $\frac{4}{5}$ от 45; в) $\frac{3}{7}$ от 140;
г) $\frac{5}{6}$ от 96; д) $\frac{3}{11}$ от 176; е) $\frac{5}{3}$ от 6.

745. Из пакета с картофелем, вес которого 3 кг, отсыпали 1 кг. Какая часть картофеля осталась в пакете?

746. Длина автобусного маршрута 24 км. Определите длину оставшейся части маршрута, если расстояние от начала маршрута до первой остановки составляет:

а) $\frac{1}{24}$ маршрута; б) $\frac{5}{24}$ маршрута; в) $\frac{3}{8}$ маршрута.

747. а) Работу выполнили за 4 ч. Какую часть работы выполняли за каждый час?

б) Бассейн наполняется за 5 ч. Какая часть бассейна наполняется за каждый час?

в) Пешеход прошёл некоторое расстояние за 6 ч. Какую часть этого расстояния он проходил за каждый час?

748. а) Путник проходит в час $\frac{1}{5}$ пути. За сколько часов он пройдёт весь путь?

б) За каждый час труба наполняет $\frac{1}{6}$ бассейна. За сколько часов она наполнит весь бассейн?

в) В каждый день выполняется $\frac{1}{7}$ некоторого задания. За сколько дней будет выполнено всё задание?

- 749.** а) Два путника вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 ч. На какую часть первоначального расстояния они сближались каждый час?
 б) Два путника вышли одновременно навстречу друг другу. Они проходят каждый час $\frac{1}{4}$ всего пути. Через сколько часов они встретятся?
- 750.** а) Поезд проходит некоторое расстояние за 8 ч. Какую часть этого расстояния он пройдёт за 1 ч? за 2 ч? за 3 ч? за 8 ч?
 б) Из семи дней недели было три солнечных дня. Какую часть недели составляет один день? Какую часть недели составляют солнечные дни?
 в) В магазине привезли 200 лампочек; 5 из них оказались неисправными. Какую часть от числа всех лампочек составляют неисправные лампочки?
 г) В букете было 4 розовых цветка и 3 белых. Какую часть всех цветов составляют белые цветы?
- 751.** Прочитайте дроби: $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{17}{17}$; $\frac{121}{30}$; $\frac{m}{3}$; $\frac{b}{2}$; $\frac{p}{q}$.
- 752.** а) Какое число называют рациональным числом?
 б) Как ещё называют рациональное число?
 в) Является ли натуральное число рациональным числом?
- 753.** Запишите пять каких-либо обыкновенных дробей. Прочитайте их, назовите числители и знаменатели.
- 754.** Назовите три дроби: а) с числителем 3; б) со знаменателем 10.
- 755.** Запишите две дроби, у которых:
 а) числитель на 2 больше знаменателя;
 б) знаменатель на 4 больше числителя.

4.2. Равенство дробей

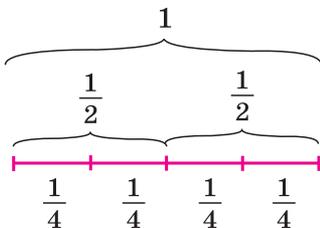


Рис. 158

Для любой дроби можно указать ряд равных ей дробей. Например:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots$$

Это можно объяснить так: если отрезок разделить пополам, а каждую половину ещё пополам, то половина отрезка будет состоять из двух четвертей этого отрезка

(рис. 158), т. е. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Например: $\frac{16}{2} = \frac{2 \cdot 8}{2 \cdot 1} = \frac{8}{1} = 8.$

В частности, $\frac{p}{p} = \frac{p \cdot 1}{p \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1$, где p — любое натуральное число.

756. Сформулируйте основное свойство дроби. Приведите пример.

757. Какую дробь называют несократимой? Приведите пример.

758. Чему равна дробь, числитель которой равен знаменателю?

759. В коробке лежат 16 кубиков. Какой дробью можно выразить взятую часть кубиков, если взять:

а) 2 кубика; б) 4 кубика; в) 8 кубиков?

760. Яблоко разрезали на 6 равных частей и поделили ломтики поровну между тремя девочками. Какой дробью можно записать часть яблока, полученную каждой девочкой?

761. Объясните с помощью рисунка 159, почему $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}.$

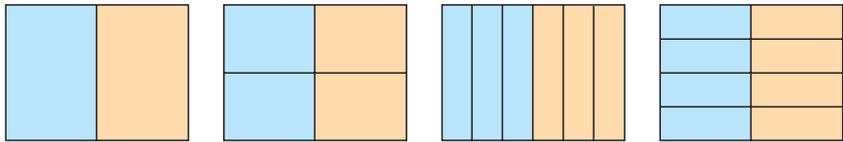


Рис. 159

Проверьте справедливость равенства (**762–765**):

762. а) $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$; б) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$; в) $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$; г) $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$;

д) $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$; е) $\frac{1}{25} = \frac{3}{75}$; ж) $\frac{1}{50} = \frac{2}{100}$; з) $\frac{1}{20} = \frac{5}{100}$.

763. а) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$; б) $\frac{5}{9} = \frac{15}{27}$; в) $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$; г) $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$;

д) $\frac{3}{5} = \frac{60}{100}$; е) $\frac{3}{10} = \frac{60}{200}$; ж) $\frac{1}{8} = \frac{125}{1000}$; з) $\frac{1}{125} = \frac{8}{1000}$.

764. а) $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; б) $\frac{20}{80} = \frac{1}{4}$; в) $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$; г) $\frac{20}{600} = \frac{1}{30}$;

д) $\frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$; е) $\frac{200}{500} = \frac{2}{5}$; ж) $\frac{60}{200} = \frac{3}{10}$; з) $\frac{80}{400} = \frac{1}{5}$.

765. а) $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$; б) $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$; в) $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$; г) $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$;

д) $\frac{36}{42} = \frac{6}{7}$; е) $\frac{32}{48} = \frac{2}{3}$; ж) $\frac{20}{8000} = \frac{1}{400}$; з) $\frac{120}{480} = \frac{1}{4}$.

766. Сократите дроби по образцу:

$$\text{а) } \frac{24}{36} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 12}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 18} = \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{6}}}{3 \cdot \underset{1}{\cancel{6}}} = \frac{2}{3}, \quad \text{короче: } \frac{\overset{2}{\cancel{24}}}{\underset{3}{\cancel{36}}} = \frac{2}{3};$$

б) $\frac{4}{8}, \frac{9}{36}, \frac{7}{28}, \frac{5}{35};$

в) $\frac{2}{8}, \frac{8}{24}, \frac{12}{28}, \frac{45}{100};$

г) $\frac{25}{35}, \frac{45}{54}, \frac{8}{400}, \frac{32}{256};$

д) $\frac{12}{18}, \frac{18}{20}, \frac{20}{24}, \frac{24}{30};$

е) $\frac{56}{49}, \frac{40}{32}, \frac{48}{36}, \frac{28}{21};$

ж) $\frac{21}{56}, \frac{144}{120}, \frac{156}{128}, \frac{396}{240}.$

767. Запишите натуральные числа 1, 2, 5 в виде дроби со знаменателем:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 10; д) 100.

768. Замените букву x числом так, чтобы равенство стало верным:

а) $\frac{18}{27} = \frac{x}{3};$ б) $\frac{5}{7} = \frac{60}{x};$ в) $\frac{x}{6} = \frac{20}{24};$ г) $\frac{49}{x} = \frac{7}{8}.$

769. а) Найдите дробь со знаменателем 18, равную дроби $\frac{2}{3}.$

б) Найдите дробь с числителем 7, равную дроби $\frac{1}{9}.$

в) Можно ли найти дробь, числитель которой натуральное число, а знаменатель 121, равную дроби $\frac{5}{11}?$

г) Можно ли найти дробь, знаменатель которой натуральное число, а числитель 144, равную дроби $\frac{35}{48}?$

770. Сократите дробь:

а) $\frac{75}{100};$ б) $\frac{42}{63};$ в) $\frac{56}{60};$ г) $\frac{81}{420};$ д) $\frac{72}{24};$

е) $\frac{75}{25};$ ж) $\frac{35}{42};$ з) $\frac{36}{32};$ и) $\frac{42}{49};$ к) $\frac{32}{60}.$

771. Найдите несократимую дробь, равную дроби:

а) $\frac{25}{100};$ б) $\frac{48}{56};$ в) $\frac{75}{125};$ г) $\frac{108}{144};$ д) $\frac{600}{720};$

е) $\frac{100}{1000};$ ж) $\frac{350}{1000};$ з) $\frac{250}{1000};$ и) $\frac{320}{6400};$ к) $\frac{800}{1000}.$

Определите, сократима ли дробь **(772, 773)**:

772. а) $\frac{30}{40}$; б) $\frac{15}{70}$; в) $\frac{125}{335}$; г) $\frac{124}{240}$; д) $\frac{254}{628}$.

773. а) $\frac{12}{27}$; б) $\frac{123}{402}$; в) $\frac{54}{801}$; г) $\frac{23}{29}$; д) $\frac{45}{46}$.

774. Укажите все общие делители и НОД числителя и знаменателя дроби, затем сократите дробь:

а) $\frac{15}{35}$; б) $\frac{48}{64}$; в) $\frac{60}{80}$; г) $\frac{44}{66}$; д) $\frac{34}{51}$.

775. Сократите дробь:

а) $\frac{54}{72}$; б) $\frac{56}{68}$; в) $\frac{18}{64}$; г) $\frac{81}{54}$; д) $\frac{24}{36}$;
е) $\frac{56}{49}$; ж) $\frac{50}{75}$; з) $\frac{48}{64}$; и) $\frac{56}{168}$; к) $\frac{18}{54}$;
л) $\frac{49}{98}$; м) $\frac{17}{51}$; н) $\frac{16}{48}$; о) $\frac{25}{125}$; п) $\frac{15}{75}$.

4.3. Задачи на дроби

Рассмотрим решения задач, в которых требуется найти часть числа или число по его части.

Задача 1. Было 600 р., $\frac{1}{4}$ этой суммы истратили. Сколько денег истратили?

Решение. Чтобы найти $\frac{1}{4}$ от 600 р., надо эту сумму разделить на 4:

$$600 : 4 = 150 \text{ (р.)}$$

Ответ: 150 р.

Задача 2. Было 1000 р., $\frac{2}{5}$ этой суммы истратили. Сколько денег истратили?

Решение. Будем считать, что 1000 р. состоит из пяти пятых долей. Сначала найдём одну пятую от 1000 р., а потом две пятых:

1) $1000 : 5 = 200 \text{ (р.)}$;

2) $200 \cdot 2 = 400 \text{ (р.)}$.

Эти два действия можно объединить: $1000 : 5 \cdot 2 = 400 \text{ (р.)}$.

Ответ: 400 р.



Чтобы найти $\frac{2}{5}$ числа 1000, можно число 1000 разделить на знаменатель дроби и результат умножить на её числитель.
Справедливо правило:

Если часть целого выражена дробью, то, чтобы найти эту часть, можно целое разделить на знаменатель дроби и результат умножить на её числитель.

Задача 3. Потратили 50 р., это составило $\frac{1}{6}$ первоначальной суммы денег. Найдите первоначальную сумму денег.

Решение. 50 р. в 6 раз меньше первоначальной суммы, т. е. первоначальная сумма в 6 раз больше, чем 50 р. Чтобы найти эту сумму, надо 50 р. умножить на 6:

$$50 \cdot 6 = 300 \text{ (р.)}$$

Ответ: 300 р.

Задача 4. Потратили 600 р., это составило $\frac{2}{3}$ первоначальной суммы денег. Найдите первоначальную сумму денег.

Решение. Будем считать, что искомое число состоит из трёх третьих долей. По условию его две трети равны 600. Сначала найдём одну треть первоначальной суммы, а потом и три третьих:

1) $600 : 2 = 300 \text{ (р.)}$;

2) $300 \cdot 3 = 900 \text{ (р.)}$.

Эти два действия можно объединить:

$$600 : 2 \cdot 3 = 900 \text{ (р.)}$$

Ответ: 900 р.

Чтобы найти число, $\frac{2}{3}$ которого равны 600, можно 600 разделить на числитель дроби и результат умножить на её знаменатель.
Справедливо правило:

Если часть искомого целого выражена дробью, то, чтобы найти это целое, можно данную часть разделить на числитель дроби и результат умножить на её знаменатель.

776. а) Как найти $\frac{3}{5}$ числа 30?

б) Как найти число, $\frac{3}{5}$ которого равны 30?

- 777.** а) На ветке сидели 12 птиц; $\frac{2}{3}$ из них улетели. Сколько птиц улетело?
 б) В классе 32 учащихся; $\frac{3}{4}$ из них катались на лыжах. Сколько учащихся каталось на лыжах?
- 778.** а) Велосипедисты за два дня проехали 48 км. В первый день они проехали $\frac{2}{3}$ всего пути. Сколько километров они проехали во второй день?
 б) Некто, имея 35 р., потратил $\frac{5}{7}$ своих денег. Сколько денег у него осталось?
 в) В тетради 24 страницы. Девочка исписала $\frac{5}{8}$ всех страниц тетради. Сколько осталось неисписанных страниц?
- 779.** Автотуристы за три дня проехали 360 км; в первый день они проехали $\frac{2}{5}$, а во второй день — $\frac{3}{8}$ всего пути. Сколько километров проехали автотуристы в третий день?
- 780.** а) В драмкружке занимаются 24 девочки и несколько мальчиков. Число мальчиков составляет $\frac{3}{8}$ числа девочек. Сколько всего учащихся занимается в драмкружке?
 б) В коллекции 45 юбилейных рублёвых монет. Число трёх- и пятирублёвых монет составляет $\frac{2}{9}$ числа рублёвых монет. Сколько всего юбилейных монет достоинством в один, три и пять рублей в коллекции?
- 781.** а) 12 р. составляют $\frac{3}{4}$ имеющейся суммы денег. Какова эта сумма?
 б) Определите длину отрезка, $\frac{3}{5}$ которого равны 15 см.
- 782.** а) Сыну 10 лет. Его возраст составляет $\frac{2}{7}$ возраста отца. Сколько лет отцу?
 б) Дочери 12 лет. Её возраст составляет $\frac{2}{5}$ возраста матери. Сколько лет матери?



783. а) Школьники собрали с одного участка 504 кг моркови, с другого — в 3 раза меньше. $\frac{1}{3}$ всей собранной моркови израсходовали. Сколько килограммов моркови израсходовали?

б) На сахарный завод привезли в первый день 633 т 600 кг свёклы, во второй день — в 2 раза меньше. Сколько сахара получилось из всей свёклы, если масса сахара составляла $\frac{1}{6}$ массы свёклы?

в) Столовая израсходовала за 4 месяца 3672 кг овощей: в первый месяц $\frac{1}{3}$ этих овощей, во второй месяц — в 2 раза меньше, чем в первый, а остальные овощи — поровну в третий и четвёртый месяцы. По сколько овощей расходовала столовая в третий и четвёртый месяцы?



784. Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Некто оставил в наследство жене, дочери и трём сыновьям 48 000 рублей и завещал жене $\frac{1}{8}$ всей суммы, а каждому из сыновей вдвое больше, чем дочери. Сколько досталось каждому из наследников?

785. На покупку овощей хозяйка израсходовала 180 р., что составило $\frac{1}{6}$ имевшихся у неё денег. Затем она купила 2 кг яблок по 54 р. за килограмм. Сколько денег у неё осталось после этих покупок?

786. Отец купил сыну костюм за 96 р., на что израсходовал $\frac{1}{3}$ своих денег. После этого он купил книгу, и у него осталось 156 р. Сколько стоила книга?

787. Сыну 8 лет; его возраст составляет $\frac{2}{9}$ возраста отца. А возраст отца составляет $\frac{3}{5}$ возраста бабушки. Сколько лет бабушке?

788. а) Уменьшите 90 р. на $\frac{1}{10}$ этой суммы.

б) Увеличьте 80 р. на $\frac{2}{5}$ этой суммы.

789. В прошлом месяце цена товара составляла 90 р. Теперь она понизилась на $\frac{3}{10}$ этой суммы. Какова теперь цена товара?

790. В прошлом месяце зарплата мамы составляла 4800 р. Теперь она увеличилась на $\frac{2}{5}$ этой суммы. Какова теперь зарплата мамы?



- 791.** Из папируса Ахмеса (Египет, ок. 2000 лет до н. э.). Приходит пастух с 70 быками. Его спрашивают:
 — Сколько приводишь ты из своего многочисленного стада?
 Пастух отвечает:
 — Я привожу две трети от трети скота.
 Сколько быков в стаде?

4.4. Приведение дробей к общему знаменателю

Дроби $\frac{7}{25}$ и $\frac{13}{25}$ имеют одинаковые знаменатели. Говорят, что они имеют **общий знаменатель** 25. Дроби $\frac{7}{8}$ и $\frac{1}{3}$ имеют разные знаменатели, но их можно **привести к общему знаменателю**. Для этого найдём число, которое делится на 8 и на 3, например 24. Приведём дроби к знаменателю 24. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{7}{8}$ на **дополнительный множитель** 3. **Дополнительный множитель** обычно пишут слева над числителем:

$${}^3/7 \quad \frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{3}$ на дополнительный множитель 8:

$${}^8/1 \quad \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{8}{24}.$$

Дроби $\frac{7}{8}$ и $\frac{1}{3}$ приведены к общему знаменателю: $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$, $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$.

Пример 1. Приведём дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{12}$ к общему знаменателю.

Так как произведение знаменателей $8 \cdot 12 = 96$, то

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 12}{8 \cdot 12} = \frac{36}{96}; \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{40}{96}.$$

Однако общим знаменателем этих дробей может быть любое из чисел, делящихся на 8 и на 12: 24, 48, 96, 120, ... Наименьшим среди этих чисел является число 24. Примем 24 за общий знаменатель дробей $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{12}$.

Так как $24 = 8 \cdot 3$ и $24 = 12 \cdot 2$, то

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24}; \quad \frac{2}{12} = \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{10}{24}.$$

Любые две дроби можно привести к общему знаменателю, которым может быть произведение их знаменателей. Но для упрощения вычислений нужно стараться привести дроби к наименьшему общему знаменателю.

Пример 2. Приведём дроби $\frac{5}{36}$ и $\frac{7}{54}$ к наименьшему общему знаменателю.

Так как $\text{НОК}(36, 54) = 108$, то наименьший общий знаменатель равен 108, поэтому

$$\frac{5}{36} = \frac{5 \cdot 3}{36 \cdot 3} = \frac{15}{108}; \quad \frac{7}{54} = \frac{7 \cdot 2}{54 \cdot 2} = \frac{14}{108}.$$

Пример 3. Приведём дроби $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{8}$ к наименьшему общему знаменателю.

Так как $\text{НОК}(4, 8) = 8$, то к знаменателю 8 надо привести только первую дробь: $\frac{2}{4} = \frac{6}{8}$.

792. а) Любые ли две дроби можно привести к общему знаменателю?

б) К какому общему знаменателю лучше всего приводить две дроби?

793. а) Сколько четвёртых содержится в $\frac{1}{2}$?

б) Сколько двадцатых содержится в $\frac{1}{2}$?

в) Сколько тридцатых содержится в $\frac{1}{3}$?

794. Для дроби $\frac{2}{3}$ запишите равную ей дробь со знаменателем:

а) 30; б) 12; в) 24; г) 102.

795. Замените следующие дроби равными им дробями со знаменателем 12:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{4}$; д) $\frac{5}{6}$; е) $\frac{3}{2}$.

796. Дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$ приведите к знаменателю 24.

797. Дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{18}$ приведите к знаменателю 36.

798. Приведите дроби к общему знаменателю, равному произведению знаменателей дробей:

- а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{5}$; в) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7}$; г) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{9}$;
д) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; е) $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{5}$; ж) $\frac{1}{2}$ и $\frac{6}{7}$; з) $\frac{1}{2}$ и $\frac{7}{9}$;
и) $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{8}$; к) $\frac{3}{7}$ и $\frac{5}{8}$; л) $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{11}$; м) $\frac{3}{10}$ и $\frac{10}{11}$;
н) $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{13}$; о) $\frac{1}{10}$ и $\frac{2}{13}$; п) $\frac{3}{10}$ и $\frac{4}{13}$; р) $\frac{9}{10}$ и $\frac{12}{13}$.

799. Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:

- а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{12}$; г) $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{30}$;
д) $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{9}$; е) $\frac{7}{8}$ и $\frac{15}{16}$; ж) $\frac{1}{100}$ и $\frac{1}{20}$; з) $\frac{3}{50}$ и $\frac{7}{150}$.

Приведите дроби к общему знаменателю (**800, 801**).

- 800.** а) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{10}$; в) $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{8}$; г) $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{9}$;
д) $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{15}$; е) $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{25}$; ж) $\frac{1}{30}$ и $\frac{1}{40}$; з) $\frac{1}{30}$ и $\frac{1}{50}$;
и) $\frac{1}{70}$ и $\frac{1}{60}$; к) $\frac{1}{50}$ и $\frac{1}{80}$; л) $\frac{1}{60}$ и $\frac{1}{15}$; м) $\frac{1}{24}$ и $\frac{1}{120}$;
н) $\frac{3}{50}$ и $\frac{7}{25}$; о) $\frac{7}{200}$ и $\frac{11}{40}$; п) $\frac{8}{17}$ и $\frac{9}{34}$; р) $\frac{3}{40}$ и $\frac{7}{25}$.

- 801.** а) $\frac{2}{15}$ и $\frac{5}{12}$; б) $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{8}$; в) $\frac{6}{15}$ и $\frac{11}{18}$; г) $\frac{5}{16}$ и $\frac{5}{12}$;
д) $\frac{7}{33}$ и $\frac{3}{77}$; е) $\frac{2}{55}$ и $\frac{5}{22}$; ж) $\frac{4}{15}$ и $\frac{3}{20}$; з) $\frac{5}{121}$ и $\frac{8}{99}$;
и) $\frac{1}{72}$ и $\frac{1}{56}$; к) $\frac{1}{48}$ и $\frac{1}{72}$; л) $\frac{2}{77}$ и $\frac{3}{44}$; м) $\frac{1}{51}$ и $\frac{1}{68}$;
н) $\frac{5}{36}$ и $\frac{7}{54}$; о) $\frac{9}{35}$ и $\frac{11}{42}$; п) $\frac{4}{49}$ и $\frac{5}{63}$; р) $\frac{15}{98}$ и $\frac{13}{72}$.

802. Приведите дробь к знаменателю 10, или 100, или 1000:

- а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{1}{5}$; д) $\frac{1}{25}$; е) $\frac{1}{125}$; ж) $\frac{3}{4}$; з) $\frac{4}{5}$.

803. Определите, равны ли дроби. Результат запишите с помощью знаков $=$ и \neq .

$$\text{а) } \frac{2}{5} \text{ и } \frac{3}{7}; \text{ так как } \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{14}{35},$$

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35} \text{ и } \frac{14}{35} \neq \frac{15}{35}, \text{ то } \frac{2}{5} \neq \frac{3}{7}.$$

б) $\frac{15}{20}$ и $\frac{18}{24}$; в) $\frac{20}{35}$ и $\frac{16}{28}$; г) $\frac{12}{30}$ и $\frac{15}{25}$; д) $\frac{18}{22}$ и $\frac{27}{33}$;

е) $\frac{30}{48}$ и $\frac{36}{56}$; ж) $\frac{56}{84}$ и $\frac{82}{108}$; з) $\frac{121}{77}$ и $\frac{45}{21}$; и) $\frac{49}{63}$ и $\frac{34}{85}$.

4.5. Сравнение дробей

На рисунке 160 изображён отрезок AB , разделённый на 7 равных частей.

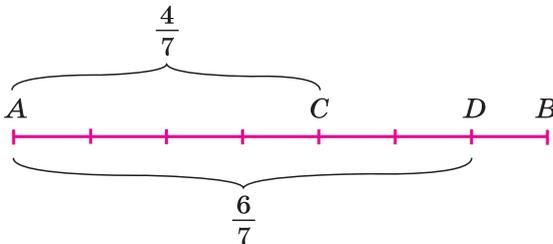


Рис. 160

Если принять длину отрезка AB за 1, то отрезок AC имеет длину $\frac{4}{7}$, а отрезок AD имеет длину $\frac{6}{7}$. Длина отрезка AD больше длины отрезка AC , т. е. дробь $\frac{6}{7}$ больше дроби $\frac{4}{7}$. Пишут: $\frac{6}{7} > \frac{4}{7}$.

Из двух дробей с общим знаменателем больше та дробь, у которой числитель больше, т. е.

$$\text{если } p > r, \text{ то } \frac{p}{q} > \frac{r}{q}.$$

Например: $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$, $\frac{6}{7} > \frac{4}{7}$, $\frac{13}{11} > \frac{12}{11}$.

Чтобы сравнить две дроби с разными знаменателями, их нужно привести к общему знаменателю, а затем применить правило сравнения дробей с общим знаменателем.

Например, сравним дроби: $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{14}$.

Наименьший общий знаменатель этих дробей равен 56.

Тогда $\frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 7} = \frac{21}{56}$, а $\frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 4}{14 \cdot 4} = \frac{20}{56}$.

Так как $21 > 20$, то $\frac{21}{56} > \frac{20}{56}$, т. е. $\frac{3}{8} > \frac{5}{14}$.

При сравнении дробей полезно следующее утверждение:

Если первая дробь меньше второй, а вторая дробь меньше третьей, то первая дробь меньше третьей.

Доказательство. Пусть даны три дроби:

$$\frac{p}{q}, \frac{r}{q}, \frac{s}{q}.$$

Так как первая дробь меньше второй, то $p < r$, а так как вторая дробь меньше третьей, то $r < s$. Из полученных неравенств для натуральных чисел следует, что $p < s$, т. е. первая дробь меньше третьей.

Дробь называется **правильной**, если её числитель меньше знаменателя. Дробь называется **неправильной**, если её числитель больше знаменателя или равен ему.

Например,

дроби $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{17}{24}$ — правильные,

дроби $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{8}$ — неправильные.

Правильная дробь меньше 1, а неправильная дробь больше или равна 1.

Например: $\frac{3}{5} < \frac{5}{5} = 1$, $\frac{5}{3} > \frac{3}{3} = 1$.

Отсюда следует, что любая правильная дробь меньше неправильной.

- 804.** а) Как сравнивают дроби с общим знаменателем?
б) Как сравнивают дроби с разными знаменателями?

- 805.** а) Какую дробь называют правильной?
б) Какую дробь называют неправильной?

806. Сравните:

- а) правильную дробь с 1; б) неправильную дробь с 1;
в) правильную дробь с неправильной.

807. С помощью рисунка 161 объясните, почему $\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$.

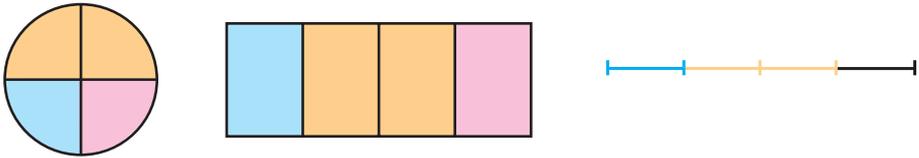


Рис. 161

808. Постройте отрезок $AB = 12$ см. Отметьте на AB точку C так, чтобы: а) $AC = \frac{1}{4}AB$; б) $AC = \frac{1}{6}AB$.

Сравните длины отрезков AB и AC , BC и AC , BC и AB .

809. Сравните дроби и результат сравнения запишите с помощью знака $>$ или $<$:

- а) $\frac{1}{5}$ и $\frac{4}{5}$; б) $\frac{2}{7}$ и $\frac{1}{7}$; в) $\frac{7}{15}$ и $\frac{8}{15}$;
г) $\frac{7}{81}$ и $\frac{6}{81}$; д) $\frac{27}{100}$ и $\frac{33}{100}$; е) $\frac{1700}{1995}$ и $\frac{1800}{1995}$.

810. Сравните дроби и результат сравнения запишите с помощью знаков $=$ и \neq :

- а) $\frac{3}{5}$ и $\frac{16}{10}$; б) $\frac{2}{3}$ и $\frac{16}{21}$; в) $\frac{7}{5}$ и $\frac{27}{20}$;
г) $\frac{1}{2}$ и $\frac{50}{100}$; д) $\frac{1}{4}$ и $\frac{25}{100}$; е) $\frac{3}{4}$ и $\frac{75}{100}$.

811. а) Что тяжелее: $\frac{3}{8}$ кг конфет или $\frac{7}{20}$ кг печенья?

б) Что тяжелее: $\frac{1}{2}$ кг пуха или $\frac{9}{18}$ кг железа?

812. Сравните дроби с одинаковыми числителями:

- а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{4}$; в) $\frac{2}{5}$ и $\frac{2}{3}$;
г) $\frac{3}{5}$ и $\frac{3}{7}$; д) $\frac{7}{13}$ и $\frac{7}{15}$; е) $\frac{8}{7}$ и $\frac{8}{11}$.

Доказываем

- 813.** Докажите, что из двух дробей с равными числителями больше та дробь, у которой знаменатель меньше.

814. Сравните дроби с числом 1, а затем между собой:

- а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{6}{5}$; б) $\frac{6}{7}$ и $\frac{7}{6}$; в) $\frac{2}{5}$ и $\frac{5}{2}$; г) $\frac{3}{5}$ и $\frac{7}{3}$;
д) $\frac{17}{13}$ и $\frac{7}{8}$; е) $\frac{8}{7}$ и $\frac{8}{9}$; ж) $\frac{78}{77}$ и $\frac{77}{78}$; з) $\frac{89}{90}$ и $\frac{90}{89}$.

815. Сравните дроби с числом $\frac{1}{2}$, а затем между собой:

- а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{4}$ и $\frac{5}{6}$; в) $\frac{2}{5}$ и $\frac{5}{8}$;
г) $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{7}$; д) $\frac{7}{13}$ и $\frac{8}{17}$; е) $\frac{8}{17}$ и $\frac{10}{19}$.

- 816.** В некоторых случаях бывает удобно сравнивать не сами дроби, а их «дополнения» до единицы. Например, сравним дроби $\frac{7}{8}$ и $\frac{8}{9}$. Чтобы из первой дроби получить 1, надо добавить $\frac{1}{8}$, а чтобы из второй дроби получить 1, надо добавить меньше: $\frac{1}{9}$. Следовательно, вторая дробь больше: $\frac{7}{8} < \frac{8}{9}$.

Сравните дроби:

- а) $\frac{8}{9}$ и $\frac{9}{10}$; б) $\frac{11}{12}$ и $\frac{12}{13}$;
в) $\frac{41}{42}$ и $\frac{42}{43}$; г) $\frac{39}{40}$ и $\frac{38}{39}$;
д) $\frac{98}{99}$ и $\frac{97}{98}$; е) $\frac{1995}{1996}$ и $\frac{1996}{1997}$.

- 817.** а) Алёша с папой стреляли в тире. Алёша из 10 выстрелов имел 5 попаданий, а папа из 5 выстрелов имел 3 попадания. Чей результат лучше?

б) Саша и Коля играли в баскетбол. Саша из 10 бросков имел 6 попаданий в кольцо, а Коля из 8 бросков имел 5 попаданий. Чей результат лучше?



ИССЛЕДУЕМ

- 818.** а) Найдите все дроби со знаменателем 10, которые больше $\frac{5}{9}$, но меньше $\frac{7}{9}$.
б) Найдите все дроби со знаменателем 13, которые больше $\frac{1}{3}$, но меньше $\frac{2}{3}$.
- 819.** а) Найдите все несократимые дроби со знаменателем 60, большие $\frac{1}{3}$, но меньшие $\frac{1}{2}$. Сколько таких дробей?
б) Найдите все несократимые дроби с числителем 60, большие $\frac{1}{3}$, но меньшие $\frac{1}{2}$. Сколько таких дробей?

4.6. Сложение дробей

На рисунке 162 изображён отрезок AB , разделённый на 9 равных частей. Если принять длину отрезка AB за 1, то $AC = \frac{2}{9}$, $CD = \frac{3}{9}$, $AD = \frac{5}{9}$. Длина отрезка AD равна сумме длин отрезков AC и CD :

$$AC + CD = AD, \text{ т. е. } \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{2+3}{9} = \frac{5}{9}.$$

Сумма дробей с общим знаменателем есть дробь, числитель которой равен сумме числителей, а знаменатель равен знаменателю данных дробей:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = \frac{p+r}{q}. \quad (1)$$

В формуле (1) и далее числители и знаменатели дробей — натуральные числа.

Например: 1) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$; 2) $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1} = 2$;
3) $\frac{2}{7} + \frac{9}{7} = \frac{2+9}{7} = \frac{11}{7}$; 4) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Рис. 162



Чтобы сложить две дроби с разными знаменателями, их надо привести к общему знаменателю, а затем применить правило сложения дробей с общим знаменателем.

Например: $\frac{5}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{10+9}{15} = \frac{19}{15}$.

Дроби можно складывать по формуле:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s} \quad (2)$$

Например, сложим по формуле (2) дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{5}$:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{10+9}{15} = \frac{19}{15}$$

Вот ещё пример: $\frac{1}{6} + \frac{7}{12} = \frac{1 \cdot 12 + 7 \cdot 6}{6 \cdot 12} = \frac{54}{72} = \frac{3}{4}$.

Если знаменатели двух дробей не являются взаимно простыми числами, как в первом примере, то сложение по формуле (2) приводит к лишним вычислениям. Однако эта формула универсальна, и её полезно запомнить.

Для упрощения вычислений нужно стараться приводить дроби к наименьшему общему знаменателю, а получаемые результаты приводить к несократимому виду.

Например: $\frac{2}{6} + \frac{7}{12} = \frac{2}{12} + \frac{7}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Чтобы сложить несколько дробей, надо к первой дроби прибавить вторую, к полученной сумме прибавить третью дробь и т. д.

Например: $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{10}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}$.

820. а) Как складывают дроби с общим знаменателем?

б) Как складывают дроби с разными знаменателями?

821. С помощью рисунка 163 объясните, почему $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.

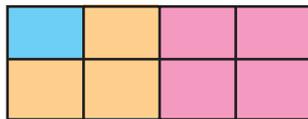


Рис. 163

822. Покажите с помощью рисунка, что $\frac{3}{10}$ дм + $\frac{2}{10}$ дм = $\frac{1}{2}$ дм.

823. Вычислите:

а) $\frac{3}{10}$ с + $\frac{3}{10}$ с; б) $\frac{1}{3}$ ч + $\frac{2}{3}$ ч; в) $\frac{3}{100}$ м + $\frac{21}{100}$ м.

824. Вычислите:

а) $\frac{1}{10}$ а + $\frac{7}{10}$ а; б) $\frac{1}{100}$ га + $\frac{4}{100}$ га;
в) $\frac{127}{1000}$ км + $\frac{123}{1000}$ км; г) $\frac{17}{1000}$ т + $\frac{983}{1000}$ т.

?

825. Вычислите:

а) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$; в) $\frac{7}{10} + \frac{4}{10}$; г) $\frac{3}{8} + \frac{5}{8}$;
д) $\frac{5}{16} + \frac{3}{16}$; е) $\frac{3}{20} + \frac{7}{20}$; ж) $\frac{8}{19} + \frac{1}{19}$; з) $\frac{7}{91} + \frac{13}{91}$.

826. Вычислите:

а) $\frac{14}{27} + \frac{2}{27}$; б) $\frac{11}{35} + \frac{12}{35}$; в) $\frac{17}{60} + \frac{12}{60}$; г) $\frac{32}{55} + \frac{23}{55}$;
д) $\frac{5}{33} + \frac{6}{33}$; е) $\frac{12}{48} + \frac{12}{48}$; ж) $\frac{8}{99} + \frac{91}{99}$; з) $\frac{77}{90} + \frac{13}{90}$.

827. Может ли сумма двух правильных дробей быть правильной дробью; неправильной дробью? Приведите примеры.

828. Вычислите:

а) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$; в) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7}$;
г) $\frac{7}{30} + \frac{7}{30} + \frac{1}{30}$; д) $\frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10}$; е) $\frac{7}{26} + \frac{5}{26} + \frac{1}{26}$.

829. Сложите дроби, полученную дробь сократите:

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3}$;
в) $\frac{7}{13} + \frac{4}{13} + \frac{2}{13}$; г) $\frac{1}{96} + \frac{5}{96} + \frac{11}{96} + \frac{31}{96}$;
д) $\frac{1}{42} + \frac{15}{42} + \frac{17}{42} + \frac{9}{42}$; е) $\frac{19}{78} + \frac{53}{78} + \frac{37}{78} + \frac{21}{78}$.

830. С помощью рисунка 164 объясните, почему:

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

831. Сделав рисунок, покажите, что

$$\frac{1}{2} \text{ дм} + \frac{1}{5} \text{ дм} = \frac{7}{10} \text{ дм}.$$

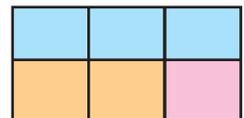
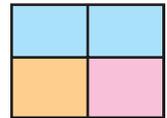


Рис. 164

832. Сложите дроби:

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$; в) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$;
д) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; е) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$; ж) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$; з) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Вычислите (**833–836**).

833. а) $\frac{1}{10} + \frac{7}{100}$; б) $\frac{21}{100} + \frac{1}{10}$; в) $\frac{3}{5} + \frac{9}{10}$; г) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$;
д) $\frac{15}{24} + \frac{3}{8}$; е) $\frac{7}{6} + \frac{16}{18}$; ж) $\frac{1}{12} + \frac{1}{6}$; з) $\frac{1}{2} + \frac{3}{10}$.

834. а) $\frac{3}{36} + \frac{7}{9}$; б) $\frac{2}{5} + \frac{3}{20}$; в) $\frac{1}{6} + \frac{5}{12}$; г) $\frac{11}{49} + \frac{6}{7}$;
д) $\frac{13}{24} + \frac{5}{8}$; е) $\frac{3}{8} + \frac{6}{32}$; ж) $\frac{6}{120} + \frac{3}{20}$; з) $\frac{9}{16} + \frac{50}{100}$.

835. а) $\frac{1}{6} + \frac{1}{9}$; б) $\frac{2}{9} + \frac{5}{6}$; в) $\frac{2}{9} + \frac{3}{8}$;
г) $\frac{2}{10} + \frac{6}{15}$; д) $\frac{3}{10} + \frac{2}{12}$; е) $\frac{5}{12} + \frac{4}{15}$;
ж) $\frac{3}{4} + \frac{5}{18}$; з) $\frac{2}{26} + \frac{3}{39}$; и) $\frac{7}{34} + \frac{5}{51}$;
к) $\frac{4}{210} + \frac{5}{140}$; л) $\frac{7}{450} + \frac{8}{180}$; м) $\frac{9}{180} + \frac{7}{120}$.

836. а) $\frac{1}{4} + \frac{4}{7} + \frac{9}{28}$; б) $\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{7}{20}$; в) $\frac{3}{20} + \frac{7}{30} + \frac{2}{40}$;
г) $\frac{17}{20} + \frac{23}{30} + \frac{11}{60}$; д) $\frac{3}{20} + \frac{7}{30} + \frac{9}{50}$; е) $\frac{7}{40} + \frac{11}{70} + \frac{13}{30}$.

837. Запишите дробь в виде суммы двух дробей:

а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{7}{9}$; в) $\frac{5}{7}$; г) $\frac{3}{10}$.

838. Подберите дробь, которая в сумме с данной дробью даёт 1:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{7}$; в) $\frac{5}{9}$; г) $\frac{8}{13}$; д) $\frac{5}{41}$; е) $\frac{13}{27}$.

839. Сложите дроби, предварительно сократив их:

а) $\frac{6}{15} + \frac{5}{25} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$;

б) $\frac{10}{16} + \frac{3}{24}$; в) $\frac{30}{45} + \frac{8}{36}$; г) $\frac{60}{120} + \frac{75}{150}$; д) $\frac{24}{360} + \frac{16}{480}$.

840. Девочка прочитала $\frac{2}{5}$ книги, потом ещё $\frac{1}{5}$. Какую часть книги она прочитала?

841. а) За завтраком съели $\frac{3}{8}$ торта, за обедом съели $\frac{5}{8}$ торта. Весь ли торт съели?

б) За первый день машинистка перепечатала $\frac{7}{16}$ рукописи, а за второй день — $\frac{1}{2}$ рукописи. Закончила ли она перепечатку рукописи?

842. Первый тракторист вспахал $\frac{2}{7}$ поля,

второй — $\frac{3}{7}$ поля. Вместе они вспахали 10 га. Какова площадь всего поля?

843. а) За каждый час первая труба наполняет $\frac{1}{2}$ бассейна, а вторая — $\frac{1}{3}$ бассейна. Какую часть бассейна наполняют обе трубы за 1 ч совместной работы?

б) Первая бригада может выполнить за день $\frac{1}{12}$ задания, а вторая — $\frac{1}{8}$ задания. Какую часть задания выполняют две бригады за 1 день совместной работы?

в) Легковая машина в час проезжает $\frac{1}{10}$ расстояния между городами, а грузовая — $\frac{1}{12}$ этого расстояния. На какую часть этого расстояния в час будут сближаться машины при движении навстречу друг другу?



4.7. Законы сложения

Для дробей, как и для натуральных чисел, выполняются переместительный и сочетательный законы сложения:

От перестановки слагаемых сумма не меняется:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}.$$

Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего:

$$\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) + \frac{m}{n} = \frac{p}{q} + \left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right).$$

Пример 1. Покажем, что $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{4}{7} + \frac{2}{7}$.

Так как переместительный закон сложения верен для натуральных чисел, то

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7} = \frac{4+2}{7} = \frac{4}{7} + \frac{2}{7}.$$

Пример 2. Покажем, что $\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\right) + \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right)$.

Так как сочетательный закон сложения верен для натуральных чисел, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\right) + \frac{2}{5} &= \frac{1+3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{(1+3)+2}{5} = \frac{1+(3+2)}{5} = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{3+2}{5} = \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right). \end{aligned}$$

Из законов сложения следует, что сумму нескольких дробей можно записывать без скобок; любые слагаемые в ней можно менять местами и заключать в скобки.

Этим часто пользуются для упрощения выражений. Например:

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{7} + \frac{2}{5} = \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{7} = \frac{3}{5} + \frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{21}{35} + \frac{15}{35} = \frac{36}{35}.$$

844. Запишите и сформулируйте переместительный закон сложения; сочетательный закон сложения.

845. Выполняется ли для дробей переместительный закон сложения; сочетательный закон сложения?

846. Можно ли в сумме чисел менять местами слагаемые, заключать слагаемые в скобки?

847. На рисунке 165 изображён отрезок AB , разделённый на четыре равные части. $AB = 12$ см.

а) Найдите длины отрезков AC и CB .

б) С помощью рисунка покажите, что $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$.



Вычислите, используя законы сложения (848–854).

848.

- а) $13 + (15 + 12)$; б) $21 + 7 + 23$; в) $19 + (37 + 11)$;
г) $37 + 14 + 26$; д) $2 + 7 + 8 + 3$; е) $9 + 7 + 3 + 1$;
ж) $15 + 8 + 2 + 5$; з) $13 + 14 + 7 + 6$.

849.

- а) $34 + 87 + 66$; б) $25 + 97 + 75$;
в) $371 + 483 + 629$; г) $631 + 783 + 369$;
д) $4344 + 1256 + 744$; е) $1594 + 920 + 3080$.

850.

- а) $\frac{11}{48} + \frac{13}{48} + \frac{17}{48}$; б) $\frac{19}{55} + \frac{18}{55} + \frac{12}{55}$; в) $\frac{25}{64} + \frac{17}{64} + \frac{15}{64}$;
г) $\frac{23}{69} + \frac{38}{69} + \frac{7}{69}$; д) $\frac{28}{43} + \frac{52}{43} + \frac{19}{43}$; е) $\frac{17}{45} + \frac{11}{45} + \frac{23}{45}$;
ж) $\frac{1}{45} + \frac{2}{45} + \frac{7}{45}$; з) $\frac{13}{44} + \frac{15}{44} + \frac{17}{44}$; и) $\frac{16}{77} + \frac{8}{77} + \frac{4}{77}$.

851.

а) $\frac{17}{30} + \frac{28}{30} = \frac{15 + 2 + 28}{30} = \dots$

- б) $\frac{29}{40} + \frac{37}{40}$; в) $\frac{58}{61} + \frac{45}{61}$; г) $\frac{257}{300} + \frac{199}{300}$; д) $\frac{379}{401} + \frac{127}{401}$.

852.

- а) $\frac{1}{5} + \frac{8}{25} + \frac{7}{25}$; б) $\frac{1}{7} + \frac{2}{21} + \frac{3}{7}$; в) $\frac{1}{15} + \frac{2}{45} + \frac{7}{15}$;
г) $\frac{3}{49} + \frac{5}{7} + \frac{4}{49}$; д) $\frac{7}{10} + \frac{2}{15} + \frac{11}{30}$; е) $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12}$.

853.

- а) $\frac{31}{80} + \left(\frac{3}{16} + \frac{39}{80}\right)$; б) $\frac{2}{45} + \left(\frac{3}{45} + \frac{7}{9}\right)$; в) $\left(\frac{3}{7} + \frac{5}{14}\right) + \frac{1}{14}$;
г) $\frac{7}{15} + \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{5}\right)$; д) $\frac{3}{16} + \left(\frac{1}{16} + \frac{5}{8}\right)$; е) $\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{14}\right) + \frac{12}{13}$.

854.

- а) $\frac{1}{27} + \frac{5}{9} + \frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{9} + \frac{5}{6} + \frac{1}{18}$; в) $\frac{2}{15} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10}$;
г) $\frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{1}{24}$; д) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16}$; е) $\frac{5}{7} + \frac{3}{14} + \frac{1}{21}$.

855.

Используя сочетательный закон сложения для натуральных чисел, проверьте равенство:

а) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) + \frac{7}{12} = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{6} + \frac{7}{12}\right)$; б) $\frac{7}{15} + \left(\frac{2}{9} + \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{7}{15} + \frac{2}{9}\right) + \frac{5}{6}$.

856.

Запишите переместительный закон сложения для чисел:

- а) $\frac{1}{7}$ и $\frac{2}{7}$; б) $\frac{a}{5}$ и $\frac{b}{5}$; в) $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{n}$.

857. Запишите сочетательный закон сложения для чисел:

а) $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}$; б) $\frac{a}{5}, \frac{b}{5}, \frac{c}{5}$; в) $\frac{m}{p}, \frac{n}{p}, \frac{k}{p}$.

858. Вычислите:

а) $\frac{1}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}$; б) $\frac{11}{12} + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{12}$;
в) $\frac{12}{17} + \frac{15}{24} + \frac{3}{8} + \frac{5}{17}$; г) $\frac{3}{7} + \frac{5}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{7}$.



859. а) Два пешехода вышли в одно время навстречу друг другу из двух деревень. Первый может пройти расстояние между двумя деревнями за 8 ч, а второй — за 6 ч. На какую часть расстояния они приблизятся за 1 ч?

б) Для постройки купальни наняты три плотника. Первый сделал в день $\frac{2}{33}$ всей работы, второй — $\frac{1}{11}$, третий — $\frac{7}{55}$. Какую часть всей работы сделали все они за день?

в) Для переписки сочинения наняты 4 писца. Первый мог бы один переписать сочинение за 24 дня, второй — за 36 дней, третий — за 20 дней, и четвёртый — за 18 дней. Какую часть сочинения перепишут они за один день, если будут работать вместе?

***860.** Отпили полчашки чёрного кофе и долили её молоком. Потом отпили $\frac{1}{3}$ чашки и долили её молоком. Потом отпили $\frac{1}{6}$ чашки и долили её молоком. Наконец допили содержимое чашки до конца. Чего выпили больше: кофе или молока?



4.8. Вычитание дробей

Разностью двух дробей называют дробь, которая в сумме с вычитаемым даёт уменьшаемое.

Например, $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$, так как $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

Будем пока рассматривать случай, когда уменьшаемое больше вычитаемого.

Разность двух дробей с общим знаменателем есть дробь с тем же знаменателем, числитель которой равен разности числителей уменьшаемого и вычитаемого:

$$\frac{p}{q} - \frac{r}{q} = \frac{p-r}{q}. \quad (1)$$

Равенство (1) верно, так как сумма разности $\frac{p-r}{q}$ и вычитаемого $\frac{r}{q}$ равна уменьшаемому $\frac{p}{q}$:

$$\frac{p-r}{q} + \frac{r}{q} = \frac{p-r+r}{q} = \frac{p}{q}.$$

Чтобы найти разность двух дробей с разными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, а затем применить правило вычитания дробей с общим знаменателем.

Например: 1) $\frac{3}{8} - \frac{8}{3} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{21}{24} - \frac{8}{24} = \frac{21-8}{24} = \frac{13}{24}$;

2) $\frac{3}{12} - \frac{2}{18} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{15}{36} - \frac{14}{36} = \frac{15-14}{36} = \frac{1}{36}$.

Дроби с разными знаменателями можно вычитать по формуле:

$$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s - r \cdot q}{q \cdot s}. \quad (2)$$

Например, вычтем из дроби $\frac{7}{8}$ дробь $\frac{1}{3}$:

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{3} = \frac{7 \cdot 3 - 1 \cdot 8}{8 \cdot 3} = \frac{21-8}{24} = \frac{13}{24}.$$

Если знаменатели двух дробей не являются взаимно простыми числами, как в рассмотренном примере, то вычитание по формуле (2) приводит к лишним вычислениям. Однако она универсальна, и полезно её запомнить.

Для упрощения вычислений нужно стараться приводить дроби к наименьшему общему знаменателю, а получаемые результаты приводить к несократимому виду.

Например: $\frac{2}{30} - \frac{5}{60} = \frac{14}{60} - \frac{5}{60} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{60}} = \frac{3}{20}$.

Принято считать число 0 равным дроби вида $\frac{0}{q}$, где q — любое натуральное число.

$$\text{Например: } 0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{4} = \dots$$

Если уменьшаемое равно вычитаемому, то разность равна нулю.

$$\text{Например: } \frac{2}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2-2}{7} = \frac{0}{7} = 0.$$

Замечание. Изучаемые нами дроби не позволяют из меньшей дроби вычесть большую. В дальнейшем будут введены отрицательные дроби, и такое действие станет возможным.

861. Что называют разностью двух дробей? Как проверить результат вычитания двух дробей?

862. а) Как вычитают дроби с общим знаменателем?
б) Как вычитают дроби с разными знаменателями?

863. Как записывают число 0 в виде дроби?

864. Чему равна разность равных дробей?

Выполните вычитание (**865, 866**).

865. а) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}$; б) $\frac{7}{20} - \frac{3}{20}$; в) $\frac{12}{16} - \frac{3}{16}$; г) $\frac{16}{27} - \frac{8}{27}$.

866. а) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{9} - \frac{1}{3}$; в) $\frac{7}{10} - \frac{3}{5}$; г) $\frac{16}{27} - \frac{1}{9}$;

д) $\frac{3}{5} - \frac{13}{45}$; е) $\frac{1}{3} - \frac{8}{27}$; ж) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; з) $\frac{3}{5} - \frac{1}{3}$;

и) $\frac{7}{8} - \frac{2}{3}$; к) $\frac{3}{4} - \frac{4}{7}$; л) $\frac{9}{16} - \frac{11}{24}$; м) $\frac{11}{12} - \frac{11}{18}$.

867. Выполните вычитание и проверьте сложением:

а) $\frac{5}{12} - \frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{5} - \frac{3}{20}$; в) $\frac{7}{8} - \frac{5}{12}$; г) $\frac{9}{10} - \frac{1}{6}$.

Вычислите (**868, 869**).

868. а) $1 - \frac{1}{2}$; б) $1 - \frac{1}{3}$; в) $1 - \frac{2}{3}$; г) $1 - \frac{1}{4}$.

869. а) $1 - \frac{3}{4}$; б) $1 - \frac{1}{5}$; в) $1 - \frac{2}{5}$; г) $1 - \frac{4}{5}$;

д) $1 - \frac{7}{10}$; е) $1 - \frac{5}{13}$; ж) $1 - \frac{11}{25}$; з) $1 - \frac{25}{25}$.

870. Найдите число x , для которого верно равенство:

а) $x + \frac{1}{8} = \frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{3} + x = \frac{5}{12}$; в) $x - \frac{3}{20} = \frac{1}{5}$;
г) $x - \frac{3}{7} = \frac{4}{21}$; д) $\frac{4}{5} - x = \frac{1}{6}$; е) $\frac{5}{8} - x = \frac{1}{3}$.

Вычислите (**871**, **872**).

871. а) $\frac{8}{18} - \frac{8}{27}$; б) $\frac{7}{16} - \frac{5}{24}$; в) $\frac{2}{11} - \frac{1}{12}$;
г) $\frac{12}{13} - \frac{15}{26}$; д) $\frac{9}{28} - \frac{11}{35}$; е) $\frac{39}{40} - \frac{19}{28}$.

872. а) $\frac{25}{28} - \frac{18}{35}$; б) $\frac{40}{63} - \frac{35}{72}$; в) $\frac{22}{21} - \frac{21}{22}$;
г) $\frac{40}{143} - \frac{41}{156}$; д) $\frac{43}{126} - \frac{41}{135}$; е) $\frac{239}{240} - \frac{229}{288}$.

873. Придумайте две дроби, разность которых равна:

а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{3}{10}$; в) $\frac{5}{9}$;
г) $\frac{5}{7}$; д) $\frac{2}{3}$; е) $\frac{3}{2}$.

874. Тракторист должен вспахать $\frac{2}{5}$ поля. До обеда он вспахал $\frac{3}{20}$ поля. Какую часть поля ему осталось вспахать?



875. Из двух сёл навстречу друг другу вышли два туриста. Через некоторое время они прошли $\frac{1}{2}$ всего пути, причём первый прошёл $\frac{3}{10}$ всего пути. Какую часть пути прошёл за это время второй турист?

876. Два тракториста скосили $\frac{5}{9}$ луга, причём первый тракторист скосил $\frac{2}{9}$ луга. Какую часть луга скосил второй тракторист?

877. а) Взрослый человек спит примерно $\frac{1}{3}$ суток. Какую часть суток он бодрствует?

б) Туристы прошли $\frac{1}{7}$, потом ещё $\frac{3}{7}$ всего маршрута. Какую часть маршрута им осталось пройти?

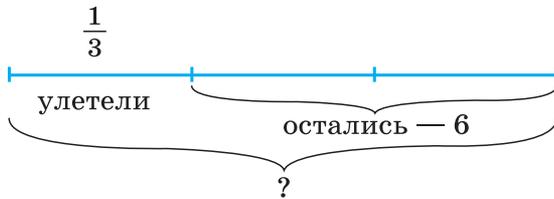


Рис. 166

- 878.** а) На ветке сидели воробьи. Когда третья часть воробьёв улетела, их осталось 6 (рис. 166). Сколько воробьёв было на ветке?
 б) Некто израсходовал $\frac{3}{4}$ своих денег, и у него осталось 20 р. Сколько денег у него было?
 в) В первый день туристы прошли $\frac{2}{5}$ намеченного маршрута, а во второй день оставшиеся 15 км. Какова длина маршрута?
 г) Сейчас у Васи в коллекции 200 марок. Известно, что за последний год число марок в коллекции увеличилось на $\frac{1}{4}$. Сколько марок было в коллекции год назад?
- 879.** а) За куски ленты длиной $\frac{1}{4}$ м и $\frac{1}{5}$ м заплатили 18 р. Сколько стоит 1 м ленты?
 б) За $\frac{1}{2}$ м тесьмы заплатили на 6 р. больше, чем за $\frac{1}{5}$ м такой же тесьмы. Сколько стоит 1 м тесьмы?
- 880.** До обеда токарь выполнил $\frac{2}{8}$ задания, после обеда — $\frac{3}{8}$ задания, после чего ему осталось обточить 24 детали. Сколько деталей он должен был обточить?
- 881.** а) Два тракториста за 1 день совместной работы вспахали $\frac{2}{3}$ поля. Первый тракторист вспахал $\frac{1}{2}$ поля. Какую часть поля вспахал второй тракторист?
 б) Две машины, движущиеся навстречу друг другу, приблизились за 1 ч на $\frac{1}{3}$ расстояния между двумя городами. Первая машина проехала $\frac{1}{8}$ этого расстояния. Какую часть всего расстояния проехала вторая машина?
 в) Через две трубы за каждый час наполняется $\frac{1}{3}$ бассейна. Через первую трубу за час наполняется $\frac{1}{10}$ бассейна. Какая часть бассейна наполняется за 1 ч через вторую трубу?

882. Машинистка перепечатала третью часть рукописи, потом ещё 10 страниц. В результате она перепечатала половину всей рукописи. Сколько страниц в рукописи?



883. Прохожий, догнавший другого, спросил: «Как далеко до деревни, которая у нас впереди?» Ответил другой прохожий: «Расстояние от той деревни, от которой ты идёшь, равно третьей части всего расстояния между деревнями, а если ещё пройдёшь 2 версты, тогда будешь ровно посередине между деревнями». Сколько вёрст осталось ещё идти первому прохожему?



884. Из книги «Косс» Адама Ризе (XVI в.). Трое выиграли некоторую сумму денег. На долю первого пришлась $\frac{1}{4}$ этой суммы, на долю второго — $\frac{1}{7}$, а на долю третьего — 17 флоринов. Как велик весь выигрыш?

4.9. Умножение дробей

Произведение двух дробей есть дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей этих дробей.

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}.$$

Например: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$

Так как любое натуральное число n можно представить в виде дроби $\frac{n}{1}$, то справедливо равенство:

$$n \cdot \frac{p}{q} = \frac{n \cdot p}{q}.$$

Доказательство: $n \cdot \frac{p}{q} = \frac{n}{1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{n \cdot p}{q}.$

Таким образом,

чтобы умножить натуральное число на дробь, можно числитель дроби умножить на это натуральное число, а знаменатель оставить тот же.

$$\text{Например: } 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}.$$

Можно считать, что произведение натурального числа n ($n > 1$) на дробь $\frac{p}{q}$ есть сумма n слагаемых, каждое из которых равно дроби $\frac{p}{q}$.

$$\text{Например: } 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{2+2+2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}.$$

Дробь $\frac{p}{q}$ называют **обратной** для дроби $\frac{q}{p}$ ($p \neq 0, q \neq 0$).

Дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{q}{p}$ называют **взаимно обратными дробями (числами)**.

Произведение взаимно обратных чисел равно 1.

Например, $\frac{2}{5}$ и $\frac{5}{2}$ — взаимно обратные числа:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 2} = \frac{10}{10} = 1.$$

Чтобы умножить несколько дробей, надо первую дробь умножить на вторую, полученное произведение умножить на третью дробь и т. д.

Например: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{15}{56}$, или, короче,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{15}{56}.$$

Определением степени с натуральным показателем можно пользоваться и для дробей.

Например: $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{8}{125}$;

$$\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4}.$$

885.

а) Как умножить две дроби? Приведите пример.

б) Как умножить натуральное число на дробь? Приведите пример.

- 886.** Назовите дробь, обратную дроби $\frac{3}{7}$.
- 887.** Какие дроби называют взаимно обратными? Приведите пример.
- 888.** Чему равно произведение взаимно обратных чисел?
- 889.** Вычислите произведение:
- а) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9}$; б) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{11}$; в) $\frac{7}{8} \cdot \frac{9}{5}$; г) $\frac{5}{8} \cdot \frac{9}{7}$.
- 890.** Запишите числитель и знаменатель дроби в виде произведения натуральных чисел и сократите полученную дробь по образцу:

$$\text{а) } \frac{6}{8} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{3}{4}; \quad \text{б) } \frac{15}{24}; \quad \text{в) } \frac{12}{8}; \quad \text{г) } \frac{25}{30}.$$

891. Сократите дробь:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } \frac{7 \cdot 8}{4 \cdot 15}; & \text{б) } \frac{6 \cdot 15}{30 \cdot 18}; & \text{в) } \frac{8 \cdot 9}{27 \cdot 6}; & \text{г) } \frac{35 \cdot 42}{30 \cdot 49}; \\ \text{д) } \frac{18 \cdot 45}{40 \cdot 27}; & \text{е) } \frac{63 \cdot 56}{49 \cdot 45}; & \text{ж) } \frac{12 \cdot 15 \cdot 26}{13 \cdot 120}; & \text{з) } \frac{48 \cdot 5 \cdot 12}{30 \cdot 16 \cdot 8}. \end{array}$$

Вычислите произведение (**892–899**).

892. а) $\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{8}$; б) $\frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9}$; в) $\frac{12}{13} \cdot \frac{2}{3}$; г) $\frac{4}{9} \cdot \frac{27}{16}$;

д) $\frac{14}{25} \cdot \frac{10}{49}$; е) $\frac{13}{10} \cdot \frac{100}{39}$; ж) $\frac{15}{14} \cdot \frac{7}{12}$; з) $\frac{45}{34} \cdot \frac{17}{15}$.

893. а) $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$; б) $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{35} \cdot \frac{10}{9}$; в) $\frac{13}{12} \cdot \frac{24}{65} \cdot \frac{15}{32}$;

г) $\frac{5}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{4}{3}$; д) $\frac{42}{56} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{15}{36}$; е) $\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10}$.

894. а) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$; б) $\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6}$; в) $\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{11}$; г) $\frac{13}{15} \cdot \frac{15}{17}$;

д) $\frac{14}{15} \cdot \frac{5}{42}$; е) $\frac{13}{15} \cdot \frac{45}{26}$; ж) $\frac{15}{28} \cdot \frac{7}{30}$; з) $\frac{35}{51} \cdot \frac{17}{15}$.

895. а) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$; б) $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{13}{18}$; в) $\frac{4}{11} \cdot \frac{22}{39} \cdot \frac{13}{16}$;

г) $\frac{42}{39} \cdot \frac{1}{42} \cdot \frac{39}{60}$; д) $\frac{101}{102} \cdot \frac{102}{103} \cdot \frac{103}{104}$; е) $\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{13}{18}$.

896. а) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$; б) $\frac{6}{7} \cdot \frac{7}{6}$; в) $\frac{9}{10} \cdot \frac{40}{27}$; г) $\frac{17}{23} \cdot \frac{46}{51}$.

897.

$$а) \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3};$$

$$б) \frac{2}{5} \cdot 2; \quad в) \frac{2}{7} \cdot 2; \quad г) \frac{3}{16} \cdot 5; \quad д) \frac{11}{20} \cdot 3;$$

$$е) \frac{1}{12} \cdot 2; \quad ж) \frac{2}{9} \cdot 3; \quad з) \frac{7}{25} \cdot 5; \quad и) 6 \cdot \frac{5}{12}.$$

898.

$$а) \frac{1}{4} \cdot 3; \quad б) 2 \cdot \frac{7}{15}; \quad в) \frac{7}{18} \cdot 2; \quad г) 7 \cdot \frac{1}{8};$$

$$д) \frac{1}{9} \cdot 2; \quad е) 2 \cdot \frac{13}{20}; \quad ж) \frac{1}{30} \cdot 3; \quad з) 3 \cdot \frac{7}{24}.$$

899.

$$а) \frac{15}{49} \cdot 14; \quad б) \frac{11}{36} \cdot 27; \quad в) 18 \cdot \frac{13}{48}; \quad г) 24 \cdot \frac{35}{56};$$

$$д) 25 \cdot \frac{7}{30}; \quad е) 32 \cdot \frac{11}{48}; \quad ж) \frac{13}{15} \cdot 6; \quad з) \frac{7}{20} \cdot 15.$$

900. Запишите произведение в виде суммы:

$$а) 3 \cdot \frac{1}{2}; \quad б) 5 \cdot \frac{2}{3}; \quad в) \frac{7}{10} \cdot 4; \quad г) \frac{7}{9} \cdot 6.$$

901. Запишите сумму в виде произведения:

$$а) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}; \quad б) \frac{7}{3} + \frac{7}{3} + \frac{7}{3} + \frac{7}{3};$$

$$в) \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}; \quad г) \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}.$$

902. Упростите числовое выражение:

$$а) 6 : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right); \quad б) 12 : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right);$$

$$в) \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{3}; \quad г) \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \right) \cdot \frac{21}{8}.$$

903. Укажите числа, обратные данным:

$$а) \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{5}{3}; \quad б) \frac{5}{6}; \frac{6}{5}; \frac{3}{1}; \frac{8}{1}; \quad в) 2; 3; 4; 1.$$

904. Являются ли числа $\frac{2}{7}$ и $\frac{63}{18}$ взаимно обратными? Ответ обоснуйте.**905.** а) Вычислите произведение $\frac{1}{2}$ и числа, обратного числу 3.б) Вычислите произведение 7 и числа, обратного числу $\frac{1}{3}$.

- 906.** Могут ли взаимно обратные числа быть одновременно:
 а) правильными дробями;
 б) неправильными дробями;
 в) натуральными числами?
- 907.** Могут ли взаимно обратные числа быть одновременно:
 а) меньше 1; б) больше 1; в) равны 1?
- 908.** Какое число обратно самому себе?
- 909.** а) Число 2 умножили на некоторую правильную дробь. Какое число получится: большее или меньшее 2?
 б) Может ли при умножении числа 3 на некоторую правильную дробь получиться число, меньшее 1? Если да, то приведите два примера.
 в) Может ли при умножении числа 4 на некоторую правильную дробь получиться число, большее 1? Если да, то приведите два примера.
 г) Верно ли, что при умножении натурального числа на правильную дробь получится число, меньшее этого натурального числа? Если да, то приведите два примера.
- 910.** В равностороннем треугольнике длина стороны равна $\frac{5}{9}$ м. Найдите периметр треугольника.
- 911.** Вычислите периметр квадрата, сторона которого равна:
 а) $\frac{1}{4}$ м; б) $\frac{1}{4}$ дм; в) $\frac{7}{32}$ м; г) $\frac{15}{64}$ дм.
- 912.** Вычислите:
 а) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; в) $\left(\frac{1}{10}\right)^3$; г) $\left(\frac{1}{25}\right)^2$;
 д) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$; е) $\left(\frac{4}{3}\right)^2$; ж) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; з) $\left(\frac{10}{3}\right)^3$.
- 913.** За минуту наполняется $\frac{1}{20}$ бассейна. Какая часть бассейна наполнится за: 2 мин; 4 мин; 10 мин; 20 мин? За сколько минут наполнится весь бассейн?
- 914.** За минуту через первую трубу наполняется $\frac{1}{20}$ бассейна, а через вторую трубу — $\frac{1}{10}$ бассейна.
 а) Какую часть бассейна наполнят обе трубы за 1 мин?
 б) Какую часть бассейна наполнят обе трубы за 6 мин?
 в) Наполнится ли бассейн через обе трубы за 8 мин?

4.10. Законы умножения.

Распределительный закон

Для дробей, как и для натуральных чисел, выполняются переместительный и сочетательный законы умножения:

От перестановки множителей произведение не меняется:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}.$$

Чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего чисел:

$$\left(\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}\right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s} \cdot \frac{m}{n}\right).$$

Пример 1. Покажем, что $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$.

Так как переместительный закон умножения верен для натуральных чисел, то

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}.$$

Пример 2. Покажем, что $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7}\right)$.

Так как сочетательный закон умножения верен для натуральных чисел, то

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{(2 \cdot 1) \cdot 5}{(3 \cdot 8) \cdot 7} = \frac{2 \cdot (1 \cdot 5)}{3 \cdot (8 \cdot 7)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 5}{8 \cdot 7} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7}\right).$$

Для дробей $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ и $\frac{m}{n}$ выполняется распределительный закон:

Чтобы число умножить на сумму двух чисел, можно это число умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить:

$$\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right) = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} + \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}.$$

$$\text{Например: } \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{9}{10} + \frac{15}{14} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{14}.$$

Докажем распределительный закон, считая, что дроби в скобках уже приведены к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right) &= \frac{p}{q} \cdot \frac{a+b}{c} = \frac{p \cdot (a+b)}{q \cdot c} = \frac{p \cdot a + p \cdot b}{q \cdot c} = \\ &= \frac{p \cdot a}{q \cdot c} + \frac{p \cdot b}{q \cdot c} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a}{c} + \frac{p}{q} \cdot \frac{b}{c}. \end{aligned}$$

Если $\frac{r}{s} \geq \frac{m}{n}$, то выполняется равенство:

$$\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s} - \frac{m}{n} \right) = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}.$$

$$\text{Например: } \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{4}{15} - \frac{11}{45} \right) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{15} - \frac{5}{7} \cdot \frac{11}{45}.$$

- 915.** Запишите равенство, выражающее:
- переместительный закон умножения;
 - сочетательный закон умножения;
 - распределительный закон.

- 916.** Сформулируйте:
- переместительный закон умножения;
 - сочетательный закон умножения;
 - распределительный закон.

- 917.** Верно ли равенство? Ответ обоснуйте.

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}; & \text{б) } \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} &= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}; \\ \text{в) } \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{4} \right) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}; & \text{г) } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \cdot 8 &= \frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{4} \cdot 8. \end{aligned}$$

Вычислите, используя законы умножения (**918–920**).

- 918.**
- $\left(54 \cdot \frac{13}{14} \right) \cdot \frac{7}{13};$
 - $\left(46 \cdot \frac{2}{15} \right) \cdot \frac{15}{23};$
 - $\left(\frac{12}{13} \cdot \frac{14}{17} \right) \cdot \left(\frac{17}{14} \cdot \frac{13}{24} \right);$
 - $\left(\frac{5}{16} \cdot \frac{13}{18} \right) \cdot \left(\frac{18}{26} \cdot \frac{16}{25} \right);$
 - $\frac{21}{22} \cdot \left(\frac{22}{23} \cdot \frac{24}{25} \right) \cdot \frac{23}{24};$
 - $\frac{32}{33} \cdot \frac{52}{53} \cdot \left(\frac{53}{52} \cdot \frac{33}{34} \right).$

919. а) $48 \cdot \frac{5}{17} + 48 \cdot \frac{12}{17}$;

б) $55 \cdot \frac{7}{11} - 55 \cdot \frac{6}{11}$;

в) $\frac{11}{13} \cdot \frac{11}{15} + \frac{11}{13} \cdot \frac{2}{15}$;

г) $\frac{12}{19} \cdot \frac{23}{15} - \frac{12}{19} \cdot \frac{4}{15}$;

д) $\frac{22}{21} \cdot \frac{5}{14} + \frac{20}{21} \cdot \frac{5}{14}$;

е) $\frac{47}{11} \cdot \frac{1}{2} - \frac{25}{11} \cdot \frac{1}{2}$.

*920. а) $\left(23 \cdot \frac{11}{25}\right) \cdot \frac{5}{43} + \left(20 \cdot \frac{11}{25}\right) \cdot \frac{5}{43}$;

б) $\left(47 \cdot \frac{1}{26}\right) \cdot \frac{13}{27} - \left(20 \cdot \frac{1}{26}\right) \cdot \frac{13}{27}$;

в) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9}\right)$;

г) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9}\right) \cdot \left(\frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10}\right)$.

ИССЛЕДУЕМ

921. Дано выражение $\frac{15}{17} \cdot \frac{a}{13} - \frac{15}{17} \cdot \frac{3}{13}$.

а) Каким натуральным числом надо заменить букву a , чтобы можно было устно найти значение этого выражения?

б) Какое натуральное число a можно взять, чтобы значение данного выражения было дробью со знаменателем 13? со знаменателем 17? натуральным числом? нулём?

4.11. Деление дробей

Частным двух дробей называют дробь, которая при умножении на делитель даёт делимое.

Частное двух дробей вычисляется по формуле:

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r}, \quad (1)$$

где $r \neq 0$.

В самом деле, $\frac{p \cdot s}{q \cdot r} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot \cancel{s} \cdot \cancel{r}}{q \cdot \cancel{r} \cdot \cancel{s}} = \frac{p}{q}$.

Заметим, что $\frac{p \cdot s}{q \cdot r} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r}$, где $\frac{s}{r}$ — дробь, обратная делителю,

поэтому,

чтобы разделить дробь на дробь, можно делимое умножить на дробь, обратную делителю.

Например: 1) $\frac{7}{9} : \frac{5}{8} = \frac{7}{9} \cdot \frac{8}{5} = \frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 5} = \frac{56}{45}$;

2) $8 : \frac{1}{2} = 8 \cdot \frac{2}{1} = 8 \cdot 2 = 16$;

3) $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5} : \frac{2}{1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{2}{5}$.

Частное любых двух натуральных чисел равно дроби, числитель которой равен делимому, а знаменатель — делителю.

Например: $2 : 3 = \frac{2}{1} : \frac{3}{1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Итак, для любых натуральных чисел p и q всегда есть их частное: дробь $\frac{p}{q}$.

Черту в записи дроби можно рассматривать как знак деления числителя на знаменатель. Поэтому часто говорят не «две третьих», а «два, делённое на три».

Например: $\frac{7}{3} = 7 : 3$, $2 : 9 = \frac{2}{9}$.

Принято считать, что в записях вида $\frac{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}}{\frac{1}{3}}$, $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$, $\frac{\frac{1}{7}}{2 - \frac{3}{7}}$ черта дроби также означает знак деления, т. е.

$$\frac{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}}{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\right) : \frac{1}{3}, \quad \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right), \quad \frac{\frac{1}{7}}{2 - \frac{3}{7}} = \frac{1}{7} : \left(2 - \frac{3}{7}\right).$$

В записях, в которых черта дроби используется несколько раз, знак «=» ставится у черты дроби, означающей последнее по порядку действие деления.

Например: $\frac{5}{\frac{2}{3}} = 5 : \frac{2}{3}$, $\frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{2} : 3$, $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{7} : \frac{4}{5}$.

Чтобы разделить дробь на натуральное число, можно её знаменатель умножить на это число.

Доказательство: $\frac{p}{q} : n = \frac{p}{q} : \frac{n}{1} = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{n} = \frac{p \cdot 1}{q \cdot n} = \frac{p}{q \cdot n}$.

Например: $\frac{7}{8} : 3 = \frac{7}{8} : \frac{3}{1} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7 \cdot 1}{8 \cdot 3} = \frac{7}{24}$.

Короче: $\frac{7}{8} : 3 = \frac{7}{8 \cdot 3} = \frac{7}{24}$.

Отметим, что число 0, делённое на любую отличную от нуля дробь, даёт 0.

$$0 : \frac{p}{q} = 0 \cdot \frac{q}{p} = \frac{0 \cdot q}{p} = \frac{0}{p} = 0.$$

Делить на нуль нельзя.

При вычислении значений числовых выражений, содержащих дроби, пользуются теми же правилами порядка действий, что и для натуральных чисел.

Например, найдём значение числового выражения:

$$\frac{25}{24} \cdot \frac{3}{5} - \frac{3}{8} : \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{2} \right).$$

1) $\frac{9}{10} + \frac{5/1}{2} = \frac{9}{10} + \frac{5}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$; 2) $\frac{25}{24} \cdot \frac{3}{5} = \frac{25 \cdot 3}{24 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 1}{8 \cdot 1} = \frac{5}{8}$;

3) $\frac{3}{8} : \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 7} = \frac{15}{56}$; 4) $\frac{7/5}{8} - \frac{15}{56} = \frac{35}{56} - \frac{15}{56} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$.

Это решение можно записать короче:

$$\begin{aligned} \frac{25}{24} \cdot \frac{3}{5} - \frac{3}{8} : \left(\frac{9}{10} + \frac{5/1}{2} \right) &= \frac{25 \cdot 3}{24 \cdot 5} - \frac{3}{8} : \frac{14}{10} = \frac{7/5}{8} - \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 7} = \frac{35 - 15}{8 \cdot 7} = \\ &= \frac{20}{8 \cdot 7} = \frac{5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14}. \end{aligned}$$

- 922.** а) Как разделить одну дробь на другую?
б) Как разделить дробь на натуральное число?

- 923.** Можно ли делить:
а) нуль на дробь, отличную от нуля;
б) дробь на нуль;
в) натуральное число на натуральное число;
г) нуль на нуль?

- 924.** Найдите частное и проверьте ответ умножением:
а) $80 : 2$; б) $100 : 25$; в) $1000 : 8$; г) $121 : 11$; д) $625 : 25$.
- 925.** Вычислите частное и проверьте ответ умножением:
а) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{8} : \frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{4} : \frac{4}{5}$;
д) $\frac{8}{9} : \frac{4}{21}$; е) $\frac{16}{25} : \frac{24}{35}$; ж) $\frac{52}{81} : \frac{26}{27}$; з) $\frac{100}{123} : \frac{75}{82}$.
- 926.** Назовите делимое и делитель, дробь, обратную делителю, и замените деление умножением на дробь, обратную делителю. Вычислите полученное произведение.
а) $\frac{1}{6} : \frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$; в) $\frac{3}{7} : \frac{6}{7}$; г) $\frac{8}{9} : \frac{4}{3}$;
д) $\frac{15}{16} : \frac{10}{24}$; е) $\frac{15}{17} : \frac{25}{34}$; ж) $\frac{32}{75} : \frac{48}{25}$; з) $\frac{38}{75} : \frac{19}{100}$;
и) $\frac{1}{2} : 2$; к) $\frac{2}{5} : 3$; л) $3 : \frac{1}{2}$; м) $8 : \frac{4}{5}$.
- 927.** Найдите число x , для которого равенство верно:
а) $x \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{15}$; б) $x : \frac{2}{7} = \frac{7}{12}$; в) $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{4}{7}$;
г) $\frac{7}{9} : x = \frac{7}{18}$; д) $x : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; е) $\frac{12}{25} : x = \frac{3}{5}$.
- 928.** а) Отрезок длиной 1 м разделили на несколько равных частей длиной $\frac{1}{10}$ м. Сколько таких частей получилось?
б) 1 кг кофе рассыпали в пакеты по $\frac{1}{4}$ кг. Сколько таких пакетов получилось?
в) 1 кг чая рассыпали в пакеты по $\frac{1}{5}$ кг. Сколько таких пакетов получилось?
г) За 1 ч выполняют $\frac{1}{3}$ некоторой работы. За сколько часов выполнят всю работу?
д) Два путника одновременно вышли навстречу друг другу из двух сёл. За 1 ч они проходят $\frac{1}{4}$ расстояния между сёлами. Через сколько часов путники встретятся?
- 929.** а) Верёвку, длина которой 20 м, разрезали на 3 равные части. Какова длина каждой части?
б) Рыболовную леску, длина которой 11 м, разрезали на 4 равные части. Какова длина каждой части?



930. Автомат фасует масло в пачки по $\frac{1}{5}$ кг. Сколько пачек получится из: а) 4 кг; б) 5 кг; в) 6 кг; г) 11 кг масла?

931. Периметр квадрата равен:
а) 16 см; б) 14 см; в) 13 см; г) 17 см.
Найдите длину стороны квадрата.

932. Ленту надо разрезать на равные куски длиной $\frac{1}{5}$ м. Сколько таких кусков получится из ленты длиной:
а) 1 м; б) 3 м; в) 11 м; г) 17 м?

933. Числа 20, 30, 40, 50 разделите: а) на 4; б) на $\frac{1}{4}$.

934. Числа $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{7}$ разделите: а) на 3; б) на $\frac{1}{3}$.

935. Запишите в виде дроби частное:
а) 1 : 2; б) 2 : 5; в) 7 : 10; г) 8 : 5.

Вычислите (**936–940**).

936. а) 15 : 3; б) 13 : 2; в) 17 : 4; г) 27 : 5;
д) 123 : 13; е) 123 : 12; ж) 168 : 22; з) 168 : 23.

937. а) $\left(\frac{1}{2} : \frac{3}{4} - \frac{4}{9}\right) : \frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{2} : \frac{3}{8} - \frac{4}{9} : \frac{3}{5}$;
в) $\frac{3}{5} : \left(\frac{9}{10} - \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{9}\right)$; г) $\frac{3}{5} : \frac{9}{10} - \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{9}$.

938. а) $4 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{3}{7} - 4 \cdot \frac{1}{35}$; б) $\frac{3}{8} \cdot 5 + \frac{5}{56} - \frac{1}{7} : \frac{1}{5}$;
в) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{2} : \frac{9}{10} - \frac{3}{2} \cdot \frac{13}{18}$; г) $\frac{4}{5} : \frac{5}{8} - \frac{4}{5} \cdot \frac{24}{25} + \frac{1}{25} : \frac{5}{4}$.

939. а) $\frac{5}{\frac{2}{3}}$; б) $\frac{2}{\frac{3}{3}}$; в) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}}$; г) $\frac{\frac{5}{17}}{\frac{15}{34}}$; д) $\frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$;
е) $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{2}$; ж) $\frac{\frac{9}{16}}{\frac{3}{4} - \frac{3}{8}}$; з) $\frac{\frac{5}{6} - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}$; и) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}$; к) $\frac{\frac{17}{14} - \frac{5}{7}}{\frac{11}{21} + \frac{1}{7}}$.

940. а) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) : \frac{5}{7}$; б) $\frac{\frac{3}{20} \cdot \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{2}\right) + \frac{79}{80}}{\frac{13}{24} : \left(\frac{7}{12} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}}$; в) $\frac{\left(3 + \frac{7}{11}\right) \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{22}}{\left(5 - \frac{3}{11}\right) : 13 + \frac{1}{2}}$.

4.12. Нахождение части целого и целого по его части

С помощью умножения и деления дробей можно решать задачи на нахождение части целого и целого по его части.

Найдём $\frac{1}{5}$ от 17. Для этого разделим 17 на 5:

$$\frac{1}{5} \text{ от } 17 \text{ есть } \frac{17}{5}.$$

Аналогично $\frac{1}{3}$ от 20 есть $\frac{20}{3}$, $\frac{1}{4}$ от 24 есть $\frac{24}{4} = 6$.

Найдём теперь $\frac{4}{5}$ от 17. Это число в 4 раза больше, чем $\frac{1}{5}$ от 17:

$$\frac{4}{5} \text{ от } 17 \text{ есть } 4 \cdot \frac{17}{5} = \frac{4 \cdot 17}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5} \cdot 17.$$

Аналогично $\frac{2}{7}$ от 40 есть $2 \cdot \frac{40}{7} = \frac{2 \cdot 40}{7 \cdot 1} = \frac{2}{7} \cdot 40$.

Чтобы найти $\frac{2}{7}$ числа, можно $\frac{2}{7}$ умножить на это число.

Пусть теперь надо найти число, $\frac{2}{5}$ которого равны 60. Из сказанного выше следует, что число 60 можно получить умножением дроби $\frac{2}{5}$ на неизвестное число. Тогда это неизвестное число можно найти, разделив 60 на $\frac{2}{5}$. Итак, число, $\frac{2}{5}$ которого равны 60, есть число

$$60 : \frac{2}{5} = \frac{60 \cdot 5}{2} = 150.$$

Аналогично число, $\frac{3}{7}$ которого равны 30, есть число

$$30 : \frac{3}{7} = \frac{30 \cdot 7}{3} = 70.$$

941. Найдите:

- а) $\frac{1}{3}$ от 11; б) $\frac{1}{5}$ от 20; в) $\frac{3}{5}$ от 7; г) $\frac{4}{7}$ от 28.

942. Найдите число:

- а) $\frac{1}{3}$ которого равна 5; б) $\frac{3}{7}$ которого равны 21.

943. Что больше:

а) $\frac{3}{5}$ от 45 м или $\frac{4}{5}$ от 30 м; б) $\frac{2}{3}$ от $\frac{3}{5}$ м или $\frac{3}{5}$ от $\frac{2}{3}$ м?

944. а) Уменьшите 900 р. на $\frac{1}{3}$ этой суммы.

б) Увеличьте 150 р. на $\frac{2}{5}$ этой суммы.

945. Число 200 увеличили на $\frac{1}{10}$ этого числа, полученный результат уменьшили на его $\frac{1}{10}$. Получилось ли снова число 200? Проверьте.

946. а) Найдите число, $\frac{2}{5}$ которого равны 60.

б) Найдите число, $\frac{3}{11}$ которого равны 99.

947. а) За 4 дня похода израсходовали $\frac{2}{5}$ всех запасённых продуктов. На сколько дней было запасено продуктов?

б) На стоянке автомашин было 15 «Жигулей». Они составляли $\frac{3}{5}$ всех автомашин. Сколько всего автомашин было на стоянке?

948. а) Число уменьшили на $\frac{3}{10}$ этого числа, получилось 210. Найдите число.

б) Задумали число, увеличили его на $\frac{1}{7}$ этого числа и получили 56. Какое число задумали?

949. Столб вкопали в землю на $\frac{1}{3}$ его длины. Он возвышается над землёй на 2 м 30 см. Определите длину столба.

950. а) В магазин привезли арбузы. До обеда магазин продал $\frac{2}{5}$, после обеда — $\frac{1}{3}$ привезённых арбузов, и осталось продать 80 арбузов. Сколько арбузов привезли в магазин?

б) Некто израсходовал половину своих денег и $\frac{1}{3}$ остатка. После этого у него осталось 6 р. Сколько денег было у него первоначально?



951. Из бочки вылили $\frac{1}{2}$ находившейся в ней воды, потом $\frac{1}{2}$ остатка, потом $\frac{1}{2}$ нового остатка. Какую часть воды вылили?



952. *Задача Бхаскары (Индия, XII в.).* Из множества чистых цветков лотоса были принесены в жертву: Шиве — третья доля этого множества, Вишну — пятая и Солнцу — шестая; четвертую долю получил Бхавани, а остальные шесть цветков получил уважаемый учитель. Сколько было цветков?



953. Капитан на вопрос «Сколько у него в команде людей?» ответил, что $\frac{2}{5}$ его команды в карауле, $\frac{2}{7}$ в работе, $\frac{1}{4}$ в лазарете да ещё 27 человек налицо. Спрашивается число людей его команды.



954. *Задача Герона Александрийского (I в.).* Бассейн ёмкостью 12 кубических единиц получает воду через две трубы, из которых одна даёт в каждый час кубическую единицу, а другая в каждый час — четыре кубические единицы. В какое время наполнится бассейн при совместном действии обеих труб?



4.13. Задачи на совместную работу

Рассмотрим задачи, в которых речь идёт о совместном выполнении некоторой работы. При этом всё равно, какую работу выполняют и чем эту работу измеряют — числом деталей, количеством вспаханных гектаров пашни и т. п. Если, например, некоторая работа выполняется за 10 ч, то за 1 ч, очевидно, выполняется $\frac{1}{10}$ всей работы, а вся работа составляет десять таких частей: $\frac{10}{10} = 1$. Поэтому обычно в таких задачах всю работу принято считать равной единице, объём выполненной работы выражают как часть этой единицы.

Задача 1. Первая бригада может выполнить задание за 36 ч, а вторая бригада может выполнить то же задание за 18 ч. За сколько часов это задание выполняют две бригады при совместной работе?

Решение. Примем всю работу за единицу, тогда за 1 ч первая бригада выполняет $1 : 36 = \frac{1}{36}$, а вторая — $1 : 18 = \frac{1}{18}$ всей работы. При совместной работе за 1 ч две бригады выполняют

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{18} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

всей работы, поэтому всю работу они выполняют за $1 : \frac{1}{12} = 12$ ч.

Ответ: за 12 ч.

Под совместной работой можно понимать и одновременную работу двух труб при наполнении бассейна, и прохождение некоторого пути при движении навстречу друг другу и т. п. Метод решения остаётся тем же.

Задача 2. Расстояние между двумя сёлами пешеход проходит за 60 мин, а велосипедист проезжает за 20 мин. Через сколько минут они встретятся, если отправятся одновременно навстречу друг другу из этих сёл?

Решение. Примем расстояние между сёлами за единицу.

1) $1 : 60 = \frac{1}{60}$ (расстояния) — проходит пешеход за 1 мин;

2) $1 : 20 = \frac{1}{20}$ (расстояния) — проезжает велосипедист за 1 мин;

3) $\frac{1}{60} + \frac{3}{20} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ (расстояния) — такую часть расстояния они проходят за 1 мин при движении навстречу друг другу;

4) $1 : \frac{1}{15} = 15$ (мин) — время движения до встречи.

Ответ: через 15 мин.

Задача 3.

За пять недель маляр Истомин

Покрасит стены в целом доме.

А лучший мастер Глеб Куделин

Покрасит стены в две недели.

За сколько дней, нам интересно,

Они всё сделают совместно?

Решение. Примем всю работу за единицу и выразим время работы каждого маляра в днях: маляр Истомин покрасит стены в доме за $5 \cdot 7 = 35$ дней, а лучший мастер Куделин сделает это за $2 \cdot 7 = 14$ дней.

- 1) $1 : 35 = \frac{1}{35}$ (работы) — выполняет Истомин за 1 день;
- 2) $1 : 14 = \frac{1}{14}$ (работы) — выполняет Куделин за 1 день;
- 3) $\frac{2}{35} + \frac{5}{14} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$ (работы) — выполняют маляры при совместной работе за 1 день;
- 4) $1 : \frac{1}{10} = 10$ (дней) — за такое время маляры покрасят стены дома при совместной работе.

Ответ: за 10 дней.

Задача 4. Старинная задача. Муж выпьет кадь питания в 14 дней, а с женою выпьет ту же кадь в 10 дней. Спрашивается, за сколько дней жена его отдельно выпьет ту же кадь.

Решение. Примем объём кади за единицу.

- 1) $1 : 14 = \frac{1}{14}$ (кади) — выпивает муж за 1 день;
- 2) $1 : 10 = \frac{1}{10}$ (кади) — выпивают вместе муж и жена за 1 день;
- 3) $\frac{7}{10} - \frac{5}{14} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35}$ (кади) — выпивает жена за 1 день;



- 4) $1 : \frac{1}{35} = 35$ (дней) — время, за которое жена выпьет кадь питания.

Ответ: за 35 дней.

Эту задачу в давние времена умели решать и без дробей. Рассмотрим такое **решение**.

«За 140 дней человек выпьет 10 кадей, а вместе с женой за 140 дней они выпьют 14 кадей. Значит, за 140 дней жена выпьет $14 - 10 = 4$ кади. Одну кадь она выпьет за $140 : 4 = 35$ дней».

Отметим, что многие задачи на совместную работу можно решить этим старинным способом, не пользуясь дробями.

- 955.** а) Через первую трубу бассейн можно наполнить за 3 ч, через вторую — за 6 ч. Какую часть бассейна наполнит каждая труба за 1 ч?

б) За каждый час первая труба наполняет $\frac{1}{3}$ бассейна, а вторая — $\frac{1}{6}$ бассейна. Какую часть бассейна наполняют обе трубы за 1 ч? За сколько часов наполнится весь бассейн, если открыть обе трубы?

в) Через первую трубу можно наполнить бак за 10 мин, через вторую — за 15 мин. За сколько минут можно наполнить бак через обе трубы?



956. Путешественник идёт из одного города в другой 10 дней, а другой путешественник тот же путь проходит за 15 дней. Через сколько дней встретятся путешественники, если выйдут одновременно навстречу друг другу из этих городов?

957. а) Через первую трубу бассейн можно наполнить за 20 ч, а через вторую — за 30 ч. За сколько часов наполнится бассейн при совместной работе этих труб?

б) Один ученик может убрать класс за 20 мин, а второй — за 30 мин. За сколько минут они могут убрать класс, работая вместе?

в) Грузовая машина проезжает расстояние между двумя городами за 30 ч, а легковая — за 20 ч. Машины одновременно выехали из этих городов навстречу друг другу. Через сколько часов они встретятся?

958. На птицеферму привезли корм, которого хватило бы уткам на 30 дней, а гусям — на 45 дней. Рассчитайте, на сколько дней хватит этого корма и уткам, и гусям вместе.

959. Заготовленных материалов хватит для работы двух цехов в течение 10 дней или одного первого цеха — в течение 15 дней. На сколько дней хватило бы этих материалов для работы только второго цеха?

960. Два тракториста вспахали поле за 6 ч совместной работы. Первый тракторист мог бы один выполнить ту же работу за 10 ч. За сколько часов второй тракторист может вспахать поле?

961. Два печника сложили печь за 16 ч. Известно, что первый из них, работая один, сложил бы печь за 24 ч. За сколько часов второй печник, работая один, сложил бы ту же печь?



962. Из пунктов A и B одновременно вышли два пешехода. Они встретились через 40 мин после своего выхода, а через 32 мин после встречи первый пришёл в B . Через сколько минут после своего выхода из B второй пришёл в A ?

963. Из пункта A в пункт B выехала грузовая машина. Одновременно с ней из пункта B в A выехала легковая машина. Грузовая машина через 2 ч после начала движения встретила легковую и ещё через 3 ч прибыла в пункт B . Сколько времени потратила легковая машина на путь из B в A ?

964. а) Лошадь съедает воз сена за месяц, коза — за два месяца, овца — за три месяца. За какое время лошадь, коза и овца вместе съедят такой же воз сена?

б) Первый плотник может построить дом за год, второй — за два года, третий — за три года, четвёртый — за четыре года. За сколько лет они построят дом при совместной работе?

Придумываем задачу

965. Каким натуральным числом можно заменить букву a в условии задачи, чтобы ответ выражался натуральным числом? Найдите несколько таких чисел.

Первая бригада может выполнить задание за 40 ч, а вторая бригада может выполнить то же задание за a ч. За сколько часов эти бригады выполнят задание при совместной работе?

4.14. Понятие смешанной дроби

Напомним, что если числитель дроби делится на знаменатель (нацело), то дробь равна частному от деления числителя на знаменатель.

Например: $\frac{6}{3} = 6 : 3 = 2$.

Любую неправильную дробь, числитель которой не делится нацело на знаменатель, можно представить в виде суммы натурального числа и правильной дроби.

Например: $\frac{17}{3} = \frac{15+2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$.

Сумму натурального числа и правильной дроби записывают сокращённо, без знака «+», и называют **смешанной дробью**. При этом натуральное число называют **целой частью**, а правильную дробь — **дробной частью смешанной дроби**.

Например, $3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ — смешанная дробь, у которой 3 — целая часть, $\frac{1}{2}$ — дробная часть.

Смешанную дробь $3\frac{1}{2}$ читают так: «три целых и одна вторая».

Чтобы записать неправильную дробь (числитель которой не делится нацело на знаменатель) в виде смешанной дроби, надо её числитель разделить на знаменатель с остатком. При этом целая часть смешанной дроби будет равна неполному частному, а дробная часть — остатку, делённому на знаменатель.

Например, так как $17 : 3 = 5$ (ост. 2), то $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$.

Каждую смешанную дробь можно записать в виде неправильной дроби. Для этого надо сложить её целую и дробную части по правилу сложения дробей.

Например: $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{3}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}$.

Чтобы записать смешанную дробь в виде неправильной дроби, знаменатель дробной части умножают на целую часть, прибавляют числитель дробной части и полученное число записывают в числитель, а знаменатель оставляют тот же.

Смешанные дроби можно сравнивать, не записывая их в виде неправильных дробей.

Если целые части смешанных дробей равны, то больше та дробь, у которой дробная часть больше.

Например, $3\frac{2}{7} > 3\frac{1}{7}$.

Если целые части смешанных дробей не равны, то больше та дробь, у которой целая часть больше.

Например, $3\frac{6}{7} < 4\frac{1}{9}$, так как $3 < 4$.

В самом деле, $3\frac{6}{7} < 4$ и $4 < 4\frac{1}{9}$, следовательно, $3\frac{6}{7} < 4\frac{1}{9}$.

966. Что называют смешанной дробью? Приведите пример.

967. Что называют:

- целой частью смешанной дроби;
- дробной частью смешанной дроби?

Приведите пример смешанной дроби, укажите её целую и дробную части.

- 968.** а) Как записать неправильную дробь в виде смешанной дроби?
б) Как записать смешанную дробь в виде неправильной дроби?
в) Как сравнивают смешанные дроби?

969. Запишите дробь в виде целого числа:

$$\text{а) } \frac{12}{4} = 12 : 4 = 3;$$

$$\text{б) } \frac{32}{4}; \quad \text{в) } \frac{56}{7}; \quad \text{г) } \frac{48}{6}; \quad \text{д) } \frac{72}{6}.$$

970. Является ли данная дробь целым числом:

$$\text{а) } \frac{3}{2}; \quad \text{б) } \frac{5}{2}; \quad \text{в) } \frac{4}{3}; \quad \text{г) } \frac{20}{5}?$$

971. Найдите целое число, равное дроби:

$$\text{а) } \frac{12}{3}; \quad \text{б) } \frac{40}{20}; \quad \text{в) } \frac{100}{25}; \quad \text{г) } \frac{75}{3}; \quad \text{д) } \frac{1000}{8}.$$

972. Определите числитель дроби в равенстве:

$$\text{а) } 2 = \frac{\quad}{2}; \quad \text{б) } 2 = \frac{\quad}{3}; \quad \text{в) } 2 = \frac{\quad}{4}; \quad \text{г) } 2 = \frac{\quad}{1}.$$

973. Запишите числа 3, 5, 7 в виде дроби со знаменателем:

$$\text{а) } 3; \quad \text{б) } 5; \quad \text{в) } 7.$$

974. Запишите сумму в виде смешанной дроби:

$$\text{а) } 5 + \frac{1}{2}; \quad \text{б) } 13 + \frac{1}{7}; \quad \text{в) } 2 + \frac{5}{7}; \quad \text{г) } 17 + \frac{15}{17}.$$

975. Запишите смешанную дробь в виде суммы натурального числа и правильной дроби:

$$\text{а) } 5 \frac{1}{8}; \quad \text{б) } 7 \frac{5}{18}; \quad \text{в) } 12 \frac{13}{75}; \quad \text{г) } 8 \frac{11}{39}.$$

976. Разделите с остатком числитель дроби на знаменатель и запишите результат в виде смешанной дроби:

$$\begin{array}{lllll} \text{а) } \frac{3}{2}; & \text{б) } \frac{4}{3}; & \text{в) } \frac{5}{4}; & \text{г) } \frac{9}{2}; & \text{д) } \frac{28}{3}; \\ \text{е) } \frac{19}{6}; & \text{ж) } \frac{17}{5}; & \text{з) } \frac{38}{13}; & \text{и) } \frac{42}{15}; & \text{к) } \frac{57}{8}. \end{array}$$

977. Запишите неправильную дробь в виде смешанной дроби:

$$\begin{array}{lllll} \text{а) } \frac{5}{2}; & \text{б) } \frac{7}{3}; & \text{в) } \frac{11}{4}; & \text{г) } \frac{6}{5}; & \text{д) } \frac{5}{3}; \\ \text{е) } \frac{7}{4}; & \text{ж) } \frac{9}{5}; & \text{з) } \frac{7}{5}; & \text{и) } \frac{72}{10}; & \text{к) } \frac{38}{7}; \\ \text{л) } \frac{25}{6}; & \text{м) } \frac{54}{13}; & \text{н) } \frac{26}{9}; & \text{о) } \frac{49}{8}; & \text{п) } \frac{90}{11}. \end{array}$$

978. Упростите запись смешанной дроби:

а) $3\frac{2}{8}$; б) $6\frac{15}{18}$; в) $14\frac{25}{75}$; г) $5\frac{26}{39}$.

979. Сравните числа:

а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{2}$; в) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$;
г) $1\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{3}$; д) $3\frac{2}{5}$ и $3\frac{1}{2}$; е) $2\frac{2}{3}$ и $2\frac{3}{4}$;
ж) $2\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{3}$; з) $3\frac{2}{5}$ и $4\frac{1}{2}$; и) $3\frac{2}{3}$ и $5\frac{3}{4}$;
к) $1\frac{1}{2}$ и $2\frac{1}{3}$; л) $4\frac{2}{5}$ и $3\frac{1}{2}$; м) $5\frac{2}{3}$ и $3\frac{3}{4}$.



980. Запишите смешанную дробь в виде неправильной дроби:

а) $1\frac{1}{2}$; б) $1\frac{1}{3}$; в) $1\frac{1}{4}$; г) $1\frac{2}{3}$; д) $1\frac{3}{4}$;
е) $2\frac{1}{4}$; ж) $3\frac{1}{5}$; з) $8\frac{1}{3}$; и) $2\frac{2}{5}$; к) $9\frac{5}{7}$;
л) $1\frac{5}{11}$; м) $1\frac{4}{13}$; н) $6\frac{1}{12}$; о) $4\frac{4}{15}$; п) $12\frac{2}{3}$.

981. Выделите целую часть дроби:

а) $\frac{9}{5}$; б) $\frac{14}{3}$; в) $\frac{15}{4}$; г) $\frac{29}{7}$; д) $\frac{39}{9}$;
е) $\frac{49}{11}$; ж) $\frac{117}{10}$; з) $\frac{138}{40}$; и) $\frac{142}{15}$; к) $\frac{257}{25}$.

4.15. Сложение смешанных дробей

Сложение смешанных дробей выполняют с помощью законов сложения.

Пример 1. Вычислить $2\frac{1}{5} + 3\frac{2}{5}$.

$$2\frac{1}{5} + 3\frac{2}{5} = \left(2 + \frac{1}{5}\right) + \left(3 + \frac{2}{5}\right) = (2 + 3) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) = 5 + \frac{3}{5} = 5\frac{3}{5}.$$

Те же вычисления записывают обычно короче, выполняя часть действий устно: $2\frac{1}{5} + 3\frac{2}{5} = 5\frac{3}{5}$.

Чтобы сложить смешанные дроби, надо сложить отдельно их целые и их дробные части и полученные результаты сложить.

Заметим, что любое натуральное число имеет дробную часть, равную нулю, и любая правильная дробь имеет целую часть, равную нулю. Поэтому складывать правильные дроби и натуральные числа со смешанными дробями можно по этому же правилу.

Пример 2. 1) $3\frac{1}{8} + 5 = 8\frac{1}{8}$; 2) $4\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = 4\frac{3}{7}$.

При сложении дробных частей двух смешанных дробей может получиться неправильная дробь. В этом случае вычисления можно записать так:

Пример 3. 1) $3\frac{3}{5} + 2\frac{4}{5} = 5 + \frac{7}{5} = 5 + 1\frac{2}{5} = 6\frac{2}{5}$;
2) $2\frac{5}{7} + 3\frac{2}{7} = 5 + \frac{7}{7} = 5 + 1 = 6$.

Если дробные части слагаемых имеют разные знаменатели, то сначала нужно привести их к общему знаменателю, а потом выполнить сложение.

Пример 4. 1) $2\frac{2}{3} + 4\frac{3}{2} = 2\frac{2}{6} + 4\frac{3}{6} = 6\frac{5}{6}$;
2) $6\frac{3}{10} + 1\frac{2}{15} = 6\frac{27}{30} + 1\frac{14}{30} = 7 + \frac{41}{30} = 7 + 1\frac{11}{30} = 8\frac{11}{30}$.

982. Как складывают смешанные дроби? Приведите примеры.

983. Запишите сумму в виде смешанной дроби:

а) $5 + \frac{1}{4}$; б) $4 + \frac{3}{7}$; в) $3 + \frac{3}{5}$; г) $12 + \frac{15}{17}$.

984. Запишите смешанную дробь в виде суммы натурального числа и правильной дроби:

а) $6\frac{2}{3}$; б) $7\frac{1}{8}$; в) $5\frac{16}{25}$; г) $1\frac{19}{20}$.

985. Вычислите сумму:

а) $9 + 5\frac{1}{2}$; б) $3\frac{3}{8} + 5$; в) $8\frac{9}{13} + 7$;
г) $13 + 2\frac{7}{9}$; д) $3 + 28\frac{3}{7}$; е) $48\frac{5}{6} + 13$;
ж) $12 + 23\frac{1}{9}$; з) $39 + 42\frac{3}{20}$.

986. Запишите обыкновенную дробь в виде смешанной дроби:

а) $\frac{9}{4}$; б) $\frac{9}{8}$; в) $\frac{16}{13}$; г) $\frac{25}{2}$; д) $\frac{17}{15}$; е) $\frac{13}{3}$.

987. Запишите сумму в виде смешанной дроби:

$$\text{а) } 2 + \frac{8}{5} = 2 + 1\frac{3}{5} = 3\frac{3}{5};$$

$$\text{б) } 3 + \frac{6}{5}; \quad \text{в) } 4 + \frac{5}{3}; \quad \text{г) } 8 + \frac{9}{5}; \quad \text{д) } 7 + \frac{25}{17}.$$

Вычислите сумму (**988—997**).

988. а) $2\frac{1}{5} + \frac{2}{5};$ б) $3\frac{9}{17} + \frac{2}{17};$ в) $3\frac{2}{25} + \frac{3}{25};$

г) $\frac{5}{8} + 3\frac{1}{8};$ д) $17\frac{9}{16} + \frac{3}{16};$ е) $\frac{7}{19} + 2\frac{5}{19};$

ж) $4\frac{13}{45} + \frac{4}{45};$ з) $3 + \frac{7}{7};$ и) $4 + \frac{3}{3}.$

989. а) $1\frac{1}{7} + 5\frac{5}{7};$ б) $3\frac{1}{5} + 5\frac{2}{5};$ в) $7\frac{1}{7} + 3\frac{2}{7};$

г) $9\frac{3}{8} + 7\frac{1}{8};$ д) $5\frac{13}{15} + 1\frac{1}{15};$ е) $3\frac{11}{19} + 7\frac{7}{19}.$

990. а) $3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2};$ б) $4\frac{3}{5} + 1\frac{2}{5};$ в) $3\frac{3}{7} + 5\frac{4}{7};$

г) $8\frac{2}{9} + 4\frac{7}{9};$ д) $4\frac{4}{15} + 2\frac{11}{15};$ е) $6\frac{11}{28} + 4\frac{17}{28}.$

991. а) $5\frac{3}{5} + 1\frac{3}{5};$ б) $3\frac{2}{7} + 2\frac{6}{7};$ в) $4\frac{3}{8} + 7\frac{7}{8};$

г) $9\frac{5}{9} + 11\frac{7}{9};$ д) $1\frac{11}{17} + 2\frac{15}{17};$ е) $4\frac{13}{27} + 8\frac{17}{27}.$

992. а) $16\frac{3}{8} + 7\frac{1}{8};$ б) $17\frac{2}{9} + 9\frac{4}{9};$ в) $17\frac{7}{15} + 7\frac{2}{15};$

г) $14\frac{5}{16} + 28\frac{5}{16};$ д) $19\frac{5}{12} + 13\frac{11}{12};$ е) $14\frac{23}{25} + 1\frac{7}{25}.$

993. а) $2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4};$ б) $7\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3};$ в) $6\frac{1}{5} + 3\frac{2}{5};$

г) $2\frac{3}{5} + 1\frac{2}{5};$ д) $4\frac{2}{9} + 1\frac{8}{9};$ е) $2\frac{9}{11} + 1\frac{4}{11};$

ж) $3\frac{1}{9} + 2\frac{2}{9};$ з) $3\frac{7}{10} + 2\frac{9}{10};$ и) $8\frac{4}{5} + 9\frac{2}{5}.$

994. а) $2\frac{1}{2} + \frac{1}{6};$ б) $3\frac{7}{12} + \frac{1}{6};$ в) $5\frac{1}{5} + \frac{3}{10};$ г) $7\frac{6}{35} + \frac{1}{5}.$

995. а) $3\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$; б) $7\frac{9}{20} + \frac{7}{30}$; в) $4\frac{13}{25} + \frac{2}{15}$;
 г) $6\frac{1}{12} + \frac{1}{18}$; д) $5\frac{3}{10} + \frac{11}{15}$; е) $9\frac{5}{24} + \frac{35}{36}$.

996. а) $9\frac{1}{2} + 3\frac{1}{8}$; б) $6\frac{9}{16} + 2\frac{1}{4}$; в) $2\frac{7}{18} + 5\frac{1}{9}$;
 г) $10\frac{1}{20} + 6\frac{3}{5}$; д) $1\frac{5}{14} + 2\frac{2}{7}$; е) $7\frac{1}{6} + 2\frac{11}{42}$.

997. а) $9\frac{2}{3} + 1\frac{1}{4}$; б) $13\frac{1}{5} + 4\frac{2}{7}$; в) $2\frac{3}{10} + 6\frac{1}{9}$;
 г) $4\frac{2}{3} + 7\frac{4}{5}$; д) $7\frac{3}{20} + 8\frac{4}{5}$; е) $2\frac{7}{48} + 11\frac{77}{96}$.

998. На отрезке AB отметили точку C так, что $CB = \frac{1}{4}$ м, а AC на $1\frac{1}{5}$ м больше CB . Найдите длину отрезка AB .

999. На отрезке AB отметили точку C так, что $CB = 7\frac{3}{10}$ м и CB на $2\frac{1}{4}$ м меньше AC . Найдите длину отрезка AB .

***1000.** Даны три числа. Первое $4\frac{1}{5}$, второе на 5 больше, чем первое, а третье на $3\frac{1}{5}$ больше второго. Какова сумма трёх чисел?

4.16. Вычитание смешанных дробей

Рассмотрим примеры вычитания меньшего числа из большего.

Если целая и дробная части уменьшаемого больше соответственно целой и дробной частей вычитаемого, то вычитание целых и дробных частей выполняют отдельно и результаты складывают.

Пример 1. $4\frac{3}{5} - 1\frac{2}{5} = 3\frac{1}{5}$.

В правильности вычислений можно убедиться, выполнив сложение:

$$3\frac{1}{5} + 1\frac{2}{5} = 4\frac{3}{5}.$$

Если целые или дробные части уменьшаемого и вычитаемого окажутся равными, то вычитание выполняют так же, как и выше.

Пример 2. 1) $8\frac{3}{7} - 1\frac{3}{7} = 7$; 2) $6\frac{5}{9} - 6\frac{1}{9} = 6\frac{4}{9}$.

В правильности вычислений можно убедиться, выполнив сложение:

$$1) 7 + 1\frac{3}{7} = 8\frac{3}{7}; \quad 2) \frac{4}{9} + 6\frac{1}{9} = 6\frac{5}{9}.$$

Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, то в целой части уменьшаемого «занимают» единицу.

Пример 3. $4\frac{2}{5} - 1\frac{4}{5} = \left(3 + 1\frac{2}{5}\right) - \left(1 + \frac{4}{5}\right) = \left(3 + \frac{7}{5}\right) - \left(1 + \frac{4}{5}\right) = 2\frac{3}{5}$.

С помощью сложения можно убедиться, что получился верный ответ.

В том случае, когда одно из двух чисел является натуральным числом или правильной дробью, вычисления выполняются аналогично.

Пример 4. 1) $8\frac{3}{7} - 1 = 7\frac{3}{7}$; 2) $4 - \frac{4}{5} = \left(3 + \frac{5}{5}\right) - \frac{4}{5} = 3\frac{1}{5}$.

Если дробные части уменьшаемого и вычитаемого имеют разные знаменатели, то сначала нужно привести их к общему знаменателю, а потом выполнить вычитание.

Пример 5. $4\frac{2}{3} - 2\frac{3}{2} = 4\frac{2}{6} - 2\frac{3}{6} = \left(3 + \frac{8}{6}\right) - 2\frac{3}{6} = 1\frac{5}{6}$.

Напомним, что разность равных чисел равна нулю. Вычитать большее число из меньшего нельзя, оставаясь среди неотрицательных чисел.

? **1001.** Как вычитают смешанные дроби?

Вычислите (**1002—1015**).

1002. а) $\frac{7}{12} - \frac{5}{12}$; б) $\frac{8}{15} - \frac{4}{15}$; в) $\frac{17}{36} - \frac{11}{36}$; г) $\frac{17}{45} - \frac{2}{45}$;
 д) $\frac{5}{48} - \frac{1}{12}$; е) $\frac{5}{12} - \frac{5}{18}$; ж) $\frac{1}{14} - \frac{1}{21}$; з) $\frac{3}{26} - \frac{4}{39}$.

1003. а) $1 - \frac{2}{5}$; б) $1 - \frac{7}{18}$; в) $1 - \frac{12}{13}$; г) $1 - \frac{2}{45}$.

1004. а) $12 - \frac{1}{7}$; б) $21 - \frac{4}{13}$; в) $45 - \frac{23}{43}$; г) $99 - \frac{43}{45}$.

1005. а) $12 - \frac{41}{70}$; б) $36 - \frac{7}{53}$; в) $35 - \frac{35}{74}$; г) $46 - \frac{53}{62}$.

- 1006.** а) $8\frac{3}{4} - 4$; б) $6\frac{2}{5} - 3$; в) $4\frac{11}{13} - 3$;
 г) $9\frac{3}{7} - \frac{2}{7}$; д) $7\frac{3}{5} - \frac{3}{5}$; е) $8\frac{4}{5} - \frac{3}{5}$.
- 1007.** а) $9\frac{4}{9} - \frac{1}{3}$; б) $8\frac{3}{16} - \frac{1}{8}$; в) $10\frac{5}{8} - \frac{1}{4}$;
 г) $11\frac{7}{12} - \frac{1}{4}$; д) $13\frac{19}{36} - \frac{1}{9}$; е) $7\frac{41}{48} - \frac{5}{6}$.
- 1008.** а) $5\frac{8}{15} - 2\frac{1}{15}$; б) $12\frac{3}{7} - 7\frac{3}{7}$; в) $8\frac{9}{16} - 3\frac{5}{16}$;
 г) $4\frac{17}{19} - 4\frac{6}{19}$; д) $17\frac{7}{16} - 3\frac{3}{16}$; е) $7\frac{18}{25} - 7\frac{8}{25}$.
- 1009.** а) $1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$; б) $1\frac{1}{5} - \frac{2}{5}$; в) $1\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$;
 г) $1\frac{1}{6} - \frac{5}{6}$; д) $1\frac{1}{9} - \frac{2}{9}$; е) $1\frac{1}{8} - \frac{5}{8}$.
- 1010.** а) $1\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$; б) $1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$; в) $1\frac{1}{5} - \frac{1}{4}$;
 г) $1\frac{1}{6} - \frac{1}{5}$; д) $1\frac{1}{9} - \frac{1}{6}$; е) $1\frac{1}{8} - \frac{5}{8}$.
- 1011.** а) $4\frac{8}{11} - 1\frac{9}{11}$; б) $13\frac{3}{7} - 5\frac{6}{7}$; в) $7\frac{5}{13} - 2\frac{8}{13}$;
 г) $5\frac{7}{19} - 4\frac{16}{19}$; д) $9\frac{5}{16} - 5\frac{9}{16}$; е) $8\frac{8}{25} - 7\frac{18}{25}$.
- 1012.** а) $4\frac{5}{16} - 1\frac{3}{8}$; б) $8\frac{6}{25} - 3\frac{4}{5}$; в) $12\frac{2}{15} - 2\frac{1}{5}$;
 г) $18\frac{14}{45} - 1\frac{7}{15}$; д) $27\frac{2}{39} - 6\frac{5}{13}$; е) $23\frac{9}{34} - 2\frac{7}{17}$.
- 1013.** а) $4\frac{1}{30} - 3\frac{1}{20}$; б) $14\frac{1}{12} - 1\frac{1}{18}$; в) $3\frac{9}{25} - 1\frac{7}{10}$;
 г) $13\frac{1}{24} - 1\frac{11}{18}$; д) $13\frac{1}{18} - 10\frac{1}{12}$; е) $16\frac{2}{25} - 12\frac{2}{15}$.
- 1014.** а) $3\frac{1}{8} - 2\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$; б) $4\frac{3}{5} - 2 + \frac{1}{10}$;
 в) $3\frac{7}{8} - 2\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$; г) $3\frac{5}{14} - 1 - \frac{6}{7}$.
- 1015.** а) $2\frac{13}{30} - \left(1\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right)$; б) $2\frac{8}{15} - \left(1\frac{3}{10} + \frac{2}{5}\right)$;
 в) $4\frac{14}{45} - 1\frac{7}{15} - \frac{3}{5}$; г) $4\frac{11}{30} - 2\frac{9}{20} - \frac{1}{10}$.

ИССЛЕДУЕМ

1016. Дано выражение $3\frac{5}{11} \cdot 2\frac{7}{13} - 3\frac{5}{11} \cdot a$.

- а) Каким числом надо заменить букву a , чтобы можно было устно найти значение этого выражения?
б) Какое число a можно взять, чтобы значение данного выражения было равно нулю?

4.17. Умножение и деление смешанных дробей

Чтобы умножить или разделить смешанные дроби, можно записать их в виде неправильных дробей и выполнить действия с обыкновенными дробями.

Пример 1. 1) $2\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{11}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{11 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$;

2) $7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = \frac{15}{2} : \frac{5}{2} = \frac{15}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15 \cdot 2}{2 \cdot 5} = 3$.

Перед возведением в степень смешанную дробь записывают в виде неправильной дроби и эту неправильную дробь возводят в степень.

Пример 2. $\left(1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$.

В несложных случаях можно не записывать смешанные дроби в виде неправильных дробей. С помощью распределительного закона можно упростить вычисления.

Пример 3. $3\frac{1}{5} \cdot 2 = \left(3 + \frac{1}{5}\right) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 2 = 6 + \frac{2}{5} = 6\frac{2}{5}$.

Эти вычисления обычно записывают короче, умножая устно целую и дробную части смешанной дроби на 2:

$$3\frac{1}{5} \cdot 2 = 6\frac{2}{5}.$$

Пример 4. $\left(\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}\right) \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 3\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{2} + 6\frac{2}{3} = 1 + 6\frac{2}{3} = 7\frac{2}{3}$.

Иногда с помощью распределительного закона можно коротко выполнить деление смешанной дроби на натуральное число.

Пример 5. $3\frac{6}{7} : 3 = 1\frac{2}{7}$.

Здесь отдельно разделили целую и дробную части смешанной дроби на 3 (т. е. умножили на $\frac{1}{3}$) и полученные результаты сложили:

$$3\frac{6}{7} : 3 = \left(3 + \frac{6}{7}\right) \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = 1 + \frac{2}{7} = 1\frac{2}{7}.$$

? **1017.** Как умножают и делят смешанные дроби?

Вычислите произведение (**1018, 1019**).

1018. а) $1\frac{1}{5} \cdot 2$; б) $2\frac{1}{5} \cdot 3$; в) $8 \cdot 3\frac{1}{4}$; г) $3\frac{2}{7} \cdot 8$;

д) $2 \cdot 5\frac{3}{4}$; е) $2\frac{4}{5} \cdot 9$; ж) $12 \cdot 5\frac{2}{3}$; з) $21\frac{1}{9} \cdot 9$.

1019. а) $1\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$; б) $2\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}$; в) $\frac{7}{9} \cdot 4\frac{1}{2}$; г) $\frac{3}{7} \cdot 3\frac{1}{3}$;

д) $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3}$; е) $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{5}$; ж) $7\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4}$; з) $5\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{9}$.

1020. Для чисел $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{5}$, $1\frac{4}{7}$ укажите обратные им числа.

1021. а) Известно, что $a \cdot b = 1$, $a = \frac{2}{5}$. Найдите b .

б) Известно, что $a \cdot b = 1$, $b = 2\frac{2}{7}$. Найдите a .

? **1022.** Могут ли два взаимно обратных числа одновременно являться смешанными дробями?

Вычислите частное (**1023, 1024**).

1023. а) $1\frac{1}{5} : 2$; б) $2\frac{2}{5} : 3$; в) $9 : 2\frac{1}{4}$; г) $3\frac{1}{7} : 2$;

д) $2 : 5\frac{1}{3}$; е) $2\frac{4}{5} : 7$; ж) $12 : 2\frac{2}{3}$; з) $21\frac{1}{4} : 5$.

1024. а) $1\frac{1}{5} : \frac{1}{5}$; б) $2\frac{2}{5} : \frac{2}{3}$; в) $\frac{5}{9} : 4\frac{1}{6}$; г) $\frac{5}{6} : 3\frac{1}{3}$;

д) $2\frac{1}{2} : 1\frac{2}{3}$; е) $3\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4}$; ж) $2\frac{2}{5} : 1\frac{1}{5}$; з) $5\frac{2}{5} : 1\frac{1}{9}$.

Вычислите, используя распределительный закон (**1025**, **1026**).

1025.

а) $1\frac{1}{3} \cdot 2 = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot 2 = 1 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 2 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$;

б) $1\frac{1}{5} \cdot 2$; в) $2\frac{1}{5} \cdot 3$; г) $3\frac{1}{4} \cdot 3$; д) $2\frac{2}{7} \cdot 3$;

е) $2 \cdot 5\frac{1}{4}$; ж) $2\frac{4}{9} \cdot 9$; з) $2 \cdot 5\frac{7}{8}$; и) $2\frac{1}{9} \cdot 3$.

1026.

а) $\frac{1}{3} \cdot 2 + 2\frac{2}{3} \cdot 2 = \left(\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}\right) \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$;

б) $1\frac{1}{5} \cdot 3 + \frac{4}{5} \cdot 3$;

в) $2\frac{4}{5} \cdot 3 - \frac{4}{5} \cdot 3$;

г) $2\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{9} + 6\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{9}$;

д) $2\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8} - 1\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{8}$;

е) $3\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{11} + 3\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{11}$;

ж) $4\frac{2}{3} \cdot 7\frac{1}{12} - 6\frac{1}{12} \cdot 4\frac{2}{3}$.

Вычислите (**1027–1029**).

1027.

а) $4\frac{1}{12} \cdot 8\frac{6}{7} \cdot 6$;

б) $6\frac{1}{4} \cdot 1\frac{2}{5} \cdot 8$;

в) $5\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{14}{19}$;

г) $3\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16}$;

д) $5\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{12} \cdot 5\frac{1}{4} \cdot \frac{6}{7} : 1\frac{1}{2}$;

е) $\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4} : 7\frac{1}{2}$;

ж) $\frac{3}{7} : 1\frac{1}{7} : 1\frac{7}{8} : \frac{11}{25} : 1\frac{1}{22} : 3\frac{2}{11}$;

з) $\frac{15}{16} : 1\frac{1}{48} : 2\frac{1}{7} : 2\frac{2}{49} : \frac{24}{125}$.

1028.

а) $\left(\frac{2}{15} + 1\frac{7}{12}\right) \cdot \frac{30}{103} - 2 : 2\frac{1}{4} \cdot \frac{9}{32} + 2\frac{1}{3}$;

б) $\left(7\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3} - 12\frac{1}{4} : \frac{7}{9}\right) : 6 + 3\frac{1}{8} + 5\frac{2}{7}$;

в) $5\frac{1}{3} : 6\frac{2}{5} + \left(12 : 3\frac{3}{5} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} + 7\frac{2}{5}$;

г) $21\frac{2}{59} - \frac{2}{5} \cdot \left(3\frac{15}{28} : \frac{9}{28} - 1 : 1\frac{10}{49}\right) : 2$.

1029.

$$\text{а) } \frac{20 : 2 \frac{2}{15} + 25 \frac{5}{7} : 1 \frac{1}{35}}{21 \frac{7}{9} : 4 \frac{2}{3} - 1};$$

$$\text{б) } \frac{6 \frac{3}{4} : 9 + 24 : \frac{6}{7} - \frac{1}{9} : \frac{4}{21}}{53 \frac{2}{3} - 22 \frac{14}{15} : 2 \frac{2}{3}};$$

$$\text{в) } \frac{20 \frac{3}{10} - \left(2 \frac{1}{10} \cdot 4 + \frac{19}{20} \cdot 10 \right)}{1 : 5};$$

$$\text{г) } \frac{4 \frac{2}{5} - 2 \frac{3}{4} + 7 \frac{7}{15} - 8 \frac{7}{60}}{7 \frac{1}{4} - 5 \frac{3}{4}};$$

$$\text{д) } \frac{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \right) : \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30} \right)}{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right)};$$

$$\text{е) } \frac{5 \frac{1}{5} : \frac{39}{40}}{2 \frac{4}{5} : \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{4}} + \frac{\left(2 - 1 \frac{3}{20} \right) \cdot 48}{\frac{1}{4} \cdot 20 + 1 : 10}.$$

4.18. Представление дробей на координатном луче

На координатном луче можно изобразить любую дробь $\frac{p}{q}$ (рис. 167). Для этого надо $\frac{1}{q}$ часть единичного отрезка отложить p раз на координатном луче от точки 0.

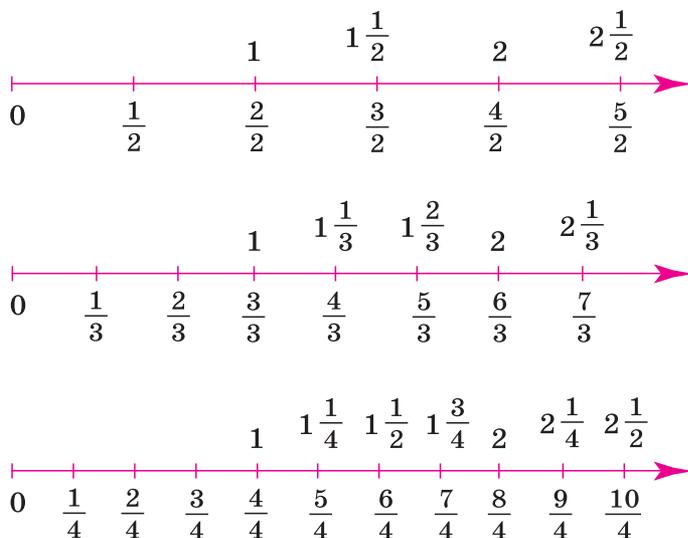


Рис. 167

Точку, изображающую на координатном луче дробь $\frac{p}{q}$, называют **точкой с координатой** $\frac{p}{q}$ или, коротко, **точкой** $\frac{p}{q}$. Например, точка A

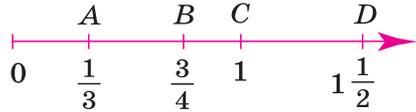


Рис. 168

(рис. 168) имеет координату $\frac{1}{3}$. Пишут: $A\left(\frac{1}{3}\right)$, говорят: «точка A с координатой $\frac{1}{3}$ ».

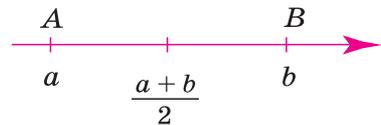
Положительные дроби называют ещё **положительными рациональными числами**, а точки, изображающие их на луче, называют **положительными рациональными точками**.

Луч обычно располагают горизонтально и направляют вправо.

Если a и b — два положительных рациональных числа и $b > a$, то:

1) точка b на координатном луче находится правее точки a ;

2) расстояние между точками a и b равно $b - a$;



3) точка $\frac{a+b}{2}$ является серединой

Рис. 169

отрезка, соединяющего точки a и b (рис. 169).

В самом деле, чтобы вычислить координату точки C — середины отрезка AB , надо к числу a прибавить половину длины отрезка AB :

$$a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Пример. Найдём длину отрезка, соединяющего точки $a = \frac{3}{5}$ и $b = 1$, и координату середины этого отрезка.

Очевидно, что $\frac{3}{5} < 1$, поэтому точка 1 находится на координатном луче правее точки $\frac{3}{5}$, а длина отрезка, соединяющего точки 1 и $\frac{3}{5}$, равна $b - a = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Середина этого отрезка имеет координату:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{3}{5} + 1}{2} = \frac{8}{5} : 2 = \frac{8 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{4}{5}.$$

Таким образом, можно вычислить координату середины отрезка, соединяющего любые две рациональные точки. Отсюда следует, что

между любыми двумя рациональными точками находится ещё хотя бы одна рациональная точка.

Число $\frac{a+b}{2}$ называется **средним арифметическим чисел a и b** .

Например, среднее арифметическое чисел 3 и 5 равно $\frac{3+5}{2} = 4$, а среднее арифметическое чисел $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{6}$ равно

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) : 2 = \frac{5}{6} : 2 = \frac{5}{12}.$$

Вообще,

Средним арифметическим нескольких чисел называют частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Например, для чисел 1, 3, 7 среднее арифметическое равно

$$\frac{1+3+7}{3} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3};$$

для чисел 1, 2, 3, 4 среднее арифметическое равно

$$\frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}.$$

1030. Изобразите на координатном луче (возьмите единичный отрезок длиной 6 см) точки $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}, \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}, \frac{12}{6}$. Покажите на этом луче точки $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 2$.

1031. Выберите удобный единичный отрезок и отметьте на координатном луче точки:

а) $0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$; б) $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 2, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}$.

1032. Изобразите на координатном луче точки $A\left(\frac{1}{2}\right), B(2), C\left(2\frac{3}{4}\right)$.

Найдите длину отрезков AB, BC, AC .

1033. Найдите координату середины отрезка, соединяющего точки:

а) 1 и 7; б) 3 и 8; в) $2\frac{1}{4}$ и $\frac{5}{8}$; г) $3\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{4}$.

1034. Даны точки $A(2)$ и $B\left(2\frac{1}{2}\right)$. Найдите координаты: точки C —

середины отрезка AB , точки D — середины отрезка CB , точки E — середины отрезка CD . Изобразите эти точки на координатном луче.

1035. Найдите координату точки B по координатам точки A и точки C — середины отрезка AB :

а) $A(2)$, $C(5)$; б) $A\left(\frac{1}{2}\right)$, $C(3)$; в) $A\left(\frac{1}{4}\right)$, $C\left(\frac{2}{3}\right)$.

***1036.** Найдите координаты точек, делящих отрезок AB на три равные части:

а) $A(5)$, $B\left(9\frac{1}{2}\right)$; б) $A\left(\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{2}{9}\right)$.

1037. Найдите среднее арифметическое чисел:

а) 4 и 6; б) 3 и $\frac{1}{2}$; в) $1\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{2}$; г) $3\frac{2}{3}$ и $2\frac{1}{4}$.

***1038.** На рисунке 170 указаны координаты точек A и B , найдите координаты точек C и D .

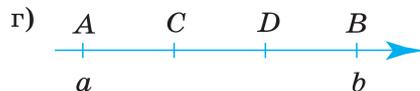
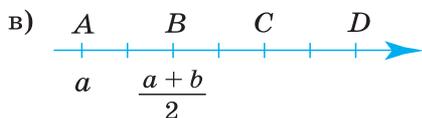
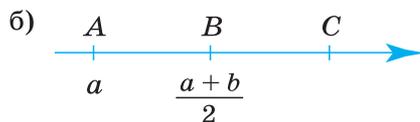
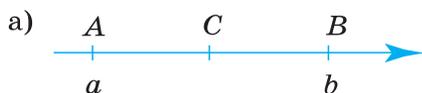


Рис. 170

1039. Найдите среднее арифметическое чисел:

а) 5, 3, 7; б) 1, 2, 10; в) 12, 15, 18;
г) 1, 2, 5, 12; д) 100, 200, 300; е) 3, 4, 5, 6, 7.

1040. а) Среднее арифметическое двух чисел равно 5. Найдите сумму этих чисел.

б) Среднее арифметическое пяти чисел равно 2. Найдите сумму этих чисел.

1041. Средний возраст одиннадцати игроков футбольной команды 21 год. Во время матча один из игроков получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся игроков оказался равным $20\frac{4}{5}$ года. Сколько лет игроку, получившему травму?

1042. Дети спросили своего учителя математики:

— Сколько вам лет?

— Если подсчитать средний возраст 32 учеников нашего класса, то получится $10\frac{1}{2}$ года. Если же при подсчётах учесть и мой возраст, то получится 11 лет. Сколько лет учителю математики?

4.19. Площадь прямоугольника.

Объём прямоугольного параллелепипеда

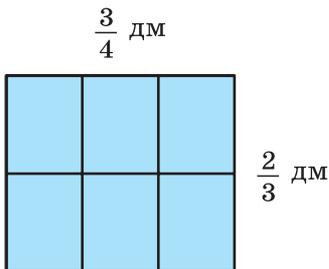
Если длина и ширина прямоугольника выражены натуральными числами a и b , то его площадь S вычисляется как произведение $a \cdot b$. При этом предполагается, что стороны прямоугольника измерены в одинаковых линейных единицах.

Формула $S = a \cdot b$ верна и при дробных a и b . На рисунке 171, а изображён прямоугольник со сторонами $a = \frac{3}{4}$ дм и $b = \frac{2}{3}$ дм. Покажем, что его площадь равна

$$S = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{2} \text{ (дм}^2\text{)}.$$

Достроим прямоугольник до квадрата со стороной 1 дм (рис. 171, б). Одну сторону квадрата разделим на 4 равные части; три из них составляют длину прямоугольника. Другую сторону квадрата разделим на 3 равные части; две из них составляют ширину прямоугольника.

а)



б)

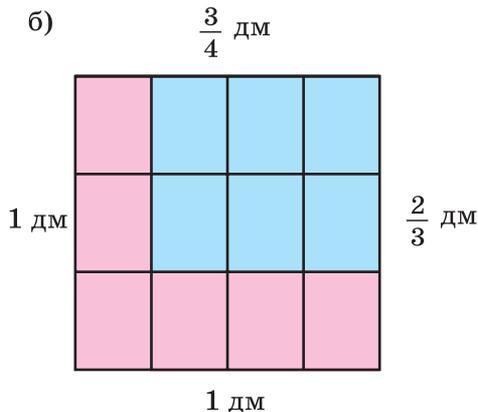


Рис. 171

Квадрат разделён на $4 \cdot 3$ равные части, площадь каждой из которых равна $\frac{1}{4 \cdot 3}$ дм².

Прямоугольник состоит из $3 \cdot 2$ таких частей, поэтому его площадь равна $3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ (дм²).

$$\text{Итак, } S = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{2} \text{ (дм}^2\text{)}.$$

Если основание a и высота b прямоугольника измерены одной линейной единицей и выражены обыкновенными дробями, то

площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту:

$$S = a \cdot b \text{ (квадратных единиц),}$$

где $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s}$.

Если длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда выражены натуральными числами a , b и c , то его объём V вычисляется как произведение $a \cdot b \cdot c$. При этом предполагается, что рёбра прямоугольного параллелепипеда измерены в одинаковых линейных единицах.

Формула $V = a \cdot b \cdot c$ верна и при дробных a , b и c . На рисунке 172 изображён прямоугольный параллелепипед с рёбрами $a = \frac{2}{5}$ дм, $b = \frac{1}{2}$ дм и $c = \frac{2}{3}$ дм. Покажем, что его объём равен

$$V = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{15} \text{ (дм}^3\text{)}.$$

Для этого достроим прямоугольный параллелепипед до куба с ребром 1 дм (рис. 173).

Одно ребро куба разделим на пять равных частей; две из них составляют ширину параллелепипеда. Другое ребро куба разделим на две равные

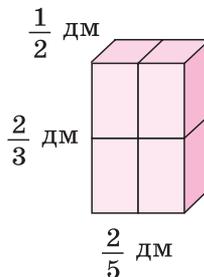


Рис. 172

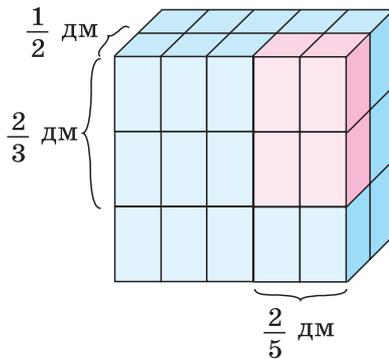


Рис. 173

части; одна из них составляет длину параллелепипеда. Третье ребро разделим на три равные части; две из них составляют высоту параллелепипеда. В результате куб разделён на $5 \cdot 2 \cdot 3$ равные ча-

сти, объём каждой из которых равен $\frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3}$ дм³.

Прямоугольный параллелепипед состоит из $2 \cdot 1 \cdot 2$ таких частей. Поэтому его объём равен

$$2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \text{ (дм}^3\text{)}.$$

Итак,

$$V = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{15} \text{ (дм}^3\text{)}.$$

Если три измерения a , b и c прямоугольного параллелепипеда (длина, ширина и высота) измерены одной линейной единицей и выражены обыкновенными дробями, то

объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений:

$$V = a \cdot b \cdot c \text{ (кубических единиц),}$$

где $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s}$, $c = \frac{t}{u}$.

Пример 1. Стороны прямоугольника равны $4 \frac{9}{10}$ см и $\frac{5}{7}$ см. Его площадь равна

$$S = 4 \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{7} = \frac{49 \cdot 5}{10 \cdot 7} = 3 \frac{1}{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Пример 2. Рёбра прямоугольного параллелепипеда равны $3 \frac{1}{3}$ дм, $\frac{4}{10}$ дм, $\frac{3}{8}$ дм. Его объём равен

$$V = 3 \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{10 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 10 \cdot 8} = \frac{1}{2} \text{ (дм}^3\text{)}.$$

- 1043.** а) Как вычислить площадь прямоугольника, зная длину и ширину?
 б) Как вычислить объём прямоугольного параллелепипеда, зная длину, ширину и высоту?

1044. Вычислите площадь прямоугольника, стороны которого равны:

- а) $\frac{3}{5}$ м и $\frac{2}{3}$ м; б) $\frac{5}{16}$ м и $\frac{4}{25}$ м; в) $1 \frac{1}{2}$ дм и $\frac{1}{5}$ дм.

1045. Площадь прямоугольника равна 4 дм^2 . Вычислите длину прямоугольника, если его ширина равна:

- а) $\frac{1}{2} \text{ дм}$; б) $\frac{2}{5} \text{ дм}$; в) $1\frac{3}{5} \text{ дм}$; г) $1\frac{1}{4} \text{ дм}$.

1046. Вычислите площадь и периметр прямоугольника, длина и ширина которого равны:

- а) $1\frac{2}{5} \text{ м}$ и $3\frac{3}{4} \text{ м}$; б) $4\frac{1}{20} \text{ м}$ и $3\frac{1}{3} \text{ м}$.

1047. Вычислите площадь и периметр квадрата со стороной:

- а) $\frac{2}{5} \text{ см}$; б) $\frac{4}{5} \text{ дм}$; в) $\frac{3}{10} \text{ м}$; г) $1\frac{1}{4} \text{ дм}$.

1048. Сколько банок краски потребуется для покраски железной крыши дома, если содержимого одной банки хватает на покраску 10 м^2 поверхности? (Размеры крыши указаны на рисунке 174.)

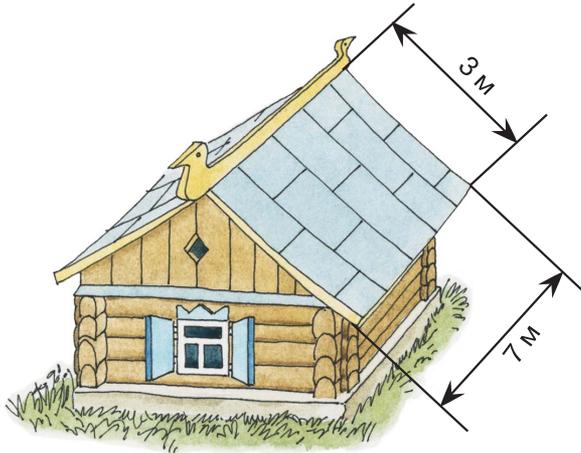


Рис. 174

1049. Необходимо покрыть кафельной плиткой пол, имеющий форму прямоугольника со сторонами $4 \text{ м } 50 \text{ см}$ и $2 \text{ м } 40 \text{ см}$. Плитки имеют форму квадрата со стороной 15 см . Сколько ящиков плитки потребуется, если в каждом ящике 50 плиток?

1050. Вычислите объём куба с ребром:

- а) $\frac{1}{2} \text{ м}$; б) $\frac{1}{4} \text{ м}$; в) $1\frac{1}{3} \text{ см}$; г) $2\frac{1}{5} \text{ дм}$.

1051. Вычислите объём прямоугольного параллелепипеда, рёбра которого равны:

- а) $\frac{1}{2} \text{ м}$, $\frac{1}{3} \text{ м}$ и $\frac{1}{4} \text{ м}$; б) $\frac{2}{5} \text{ дм}$, $\frac{3}{4} \text{ дм}$ и $\frac{5}{7} \text{ дм}$;
в) 50 мм , 2 см и $\frac{3}{100} \text{ м}$; г) $\frac{3}{10} \text{ дм}$, $\frac{23}{100} \text{ м}$ и 2 дм .

1052. Вычислите площадь всех граней и объём куба с ребром:

- а) $\frac{2}{3}$ см; б) $\frac{4}{5}$ м.

1053. Вычислите площадь всех граней и объём прямоугольного параллелепипеда, рёбра которого равны:

- а) $1\frac{1}{3}$ дм, $\frac{1}{4}$ дм и $\frac{1}{2}$ дм;
б) $\frac{1}{5}$ дм, $1\frac{1}{4}$ дм и $\frac{1}{3}$ дм.

1054. Вычислите объём классной комнаты в литрах, если её ширина 6 м, длина 8 м, а высота $3\frac{1}{4}$ м. Вычислите, сколько литров воздуха приходится на каждого из 25 учащихся, занимающихся в этом классе. Составьте и решите аналогичную задачу, учитывая размеры вашей классной комнаты и число учащихся вашего класса.

1055. В магазине продаются аквариумы. Какой из двух аквариумов имеет больший объём, если их размеры: 42 см, $\frac{1}{3}$ м, $2\frac{1}{2}$ дм и 54 см, $\frac{1}{4}$ м, $2\frac{1}{5}$ дм?

1056. Площадь пола комнаты 16 м^2 , высота комнаты $2\frac{1}{4}$ м. Определите объём этой комнаты.

***1057.** Постройте развёртку прямоугольного параллелепипеда, рёбра которого $\frac{2}{5}$ дм, $\frac{1}{4}$ дм, $\frac{1}{2}$ дм. Вырежьте развёртку из бумаги, оставляя припуски для склеивания, и склейте прямоугольный параллелепипед. Определите объём и сумму площадей всех граней получившегося прямоугольного параллелепипеда.

1058. Постройте развёртку куба, ребро которого $\frac{1}{25}$ м. Вырежьте развёртку из бумаги, оставляя припуски для склеивания, и склейте куб. Определите объём и сумму площадей всех граней получившегося куба.

1059. Квадрат площадью 1 м^2 разрезали на несколько равных квадратов площадью:

- а) $\frac{1}{4}\text{ м}^2$; б) $\frac{1}{9}\text{ м}^2$; в) $\frac{1}{16}\text{ м}^2$; г) $\frac{1}{25}\text{ м}^2$.

Сколько таких квадратов получилось?

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

1 СЛОЖНЫЕ ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ ПО РЕКЕ

Рассмотрим задачи на движение по реке, при решении которых удобно весь путь принимать за единицу, а скорость катера по течению реки, против течения и скорость течения реки выражать как часть пути, пройденного за единицу времени.

Задача 1. Расстояние между пристанями A и B на реке плот проплывает за 12 ч. Такое же расстояние теплоход проплывает по озеру за 4 ч. За сколько часов теплоход проплывёт расстояние между пристанями A и B : а) по течению реки; б) против течения реки?

Решение. Примем всё расстояние между пристанями A и B за единицу, тогда за 1 ч плот проплывает по реке $1 : 12 = \frac{1}{12}$ этого расстояния, а теплоход за 1 ч проплывает по озеру $1 : 4 = \frac{1}{4}$ такого же расстояния.



а) За 1 ч по течению реки теплоход проплывает $\frac{3}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ расстояния AB , значит, расстояние AB он проплывает за $1 : \frac{1}{3} = 3$ ч.

б) За 1 ч против течения реки теплоход проплывает $\frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ расстояния AB , значит, расстояние AB он проплывает за $1 : \frac{1}{6} = 6$ ч.

Ответ: а) за 3 ч; б) за 6 ч.

Задача 2. Катер проплывает некоторое расстояние по озеру за 6 ч, а по течению реки — за 5 ч. Сколько времени потребуется плоту, чтобы преодолеть такое расстояние по реке?

Решение. Примем всё расстояние за единицу.

1) $1 : 6 = \frac{1}{6}$ (расст.) — проплывает катер по озеру за 1 ч;

2) $1 : 5 = \frac{1}{5}$ (расст.) — проплывает катер по течению реки за 1 ч;

3) $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ (расст.) — на $\frac{1}{30}$ расстояния за 1 ч относит по течению катер (плот);

4) $1 : \frac{1}{30} = 30$ (ч) — будет плыть плот это расстояние по реке.

Ответ: 30 ч.

***1060.** Расстояние между пристанями A и B на реке плот проплывает за 6 ч, а теплоход проплывает по озеру такое же расстояние за 3 ч. За сколько часов теплоход проплывает расстояние между пристанями A и B :

а) по течению реки; б) против течения реки?

***1061.** Расстояние между пристанями A и B на реке бревно проплывает за 12 ч. Теплоход проплывает расстояние AB по течению реки за 3 ч. За сколько часов теплоход проплывёт расстояние AB :

а) по озеру; б) против течения реки?

***1062.** Расстояние между пристанями A и B на реке плот проплывает за 15 мин, а катер проплывает расстояние AB против течения реки за 30 мин. За сколько минут катер проплывёт расстояние AB :

а) по озеру; б) по течению реки?

***1063.** Расстояние между пристанями A и B катер проплывает по течению реки за 8 мин, а такое же расстояние по озеру — за 12 мин. За сколько минут проплывёт расстояние между пристанями A и B :

а) плот; б) катер против течения реки?

***1064.** Расстояние между пристанями A и B моторная лодка проплывает против течения реки за 30 мин, а такое же расстояние по озеру — за 10 мин. За сколько минут проплывёт расстояние между пристанями A и B :

а) плот; б) моторная лодка по течению реки?

***1065.** Расстояние между пристанями A и B моторная лодка проплывает по течению реки за 15 мин, а против течения — за 60 мин. За сколько минут проплывёт то же расстояние:

а) бревно по реке; б) моторная лодка по озеру?

***1066.** а) Теплоход от Киева до Херсона идёт трое суток, а от Херсона до Киева — четверо суток (без остановок). Сколько времени будут плыть плоты от Киева до Херсона?

б) Из Нижнего Новгорода в Астрахань теплоход плывёт 5 суток, а обратно — 7 суток. За сколько суток из Нижнего Новгорода в Астрахань приплывут плоты?

Придумываем задачу

1067. Каким натуральным числом можно заменить букву a в условии задачи, чтобы ответ выражался натуральным числом? Найдите несколько таких чисел.

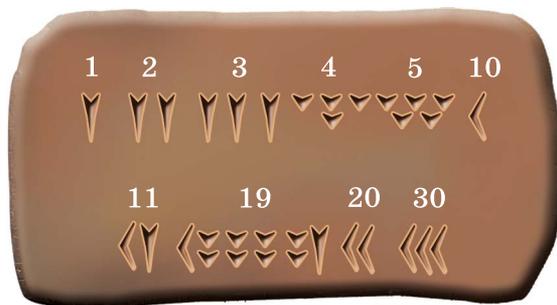
Из пункта A в пункт B против течения реки теплоход плывёт 20 ч. А из пункта B в пункт A — a ч ($6 < a < 18$). За сколько часов из пункта B в пункт A приплывут плоты?

2 ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ



С древних времён до нас дошли памятники письменности разных народов. Так, в Древнем Вавилоне (ок. 4000 лет назад) запись делали деревянными палочками на мягкой глине. Получались глиняные таблички, испещрённые клинышками. Среди сохранившихся образцов клинописи есть и математические тексты.

Для обозначения единицы использовали знак \blacktriangledown , десяти — \blacktriangleleft и т. д. Вот несколько примеров таких записей:



Основу системы мер веса и денег в Древнем Вавилоне составлял 1 талант; его делили на 60 мин, а мину — на 60 шекелей. Например, 2 таланта 13 мин 41 шекель записывали так:



Позднее в математических текстах так же обозначали и отвлечённые (неименованные) числа. Например, та же запись означала

не только 2 таланта 13 мин 41 шекель, но и 2 единицы третьего разряда, 13 единиц второго разряда и 41 единицу первого разряда, причём единицы каждого следующего разряда (справа налево) в 60 раз больше единиц предыдущего разряда.

В вавилонских клинописях более позднего времени наряду с шестидесятеричной системой записи натуральных чисел и дробей встречаются обозначения обыкновенных и смешанных дробей. Например, в клинописи 666 года до н. э. числа $\frac{1}{2}$ и $42\frac{1}{2}$ записаны так:



Шестидесятеричная система записи натуральных чисел дала основу для записи дробей, так, 2 таланта 13 мин 41 шекель составляют $2 \cdot 60^2 + 13 \cdot 60 + 41$ шекель или $2 + \frac{13}{60} + \frac{41}{60^2}$ таланта.

Таким образом, шестидесятые доли таланта, мины (любой единицы) записывали с помощью натуральных чисел. Это позволяло долго вести расчёты с долями единицы как с натуральными числами.

В дальнейшем шестидесятеричная запись дробей была усовершенствована, появились специальные обозначения и названия для дробей:

$$\frac{1}{60} = 1' = 1 \text{ минута}, \quad \frac{1}{60^2} = \frac{1}{3600} = 1'' = 1 \text{ секунда},$$

$$\frac{1}{60^3} = \frac{1}{216\,000} = 1''' = 1 \text{ терция и т. д.}$$

После того как были открыты правила действий с обыкновенными дробями, не произошло полного вытеснения шестидесятеричных дробей, так как они имели важное преимущество перед обыкновенными дробями — записывались без знаменателей и их было удобно складывать и вычитать.

В Древнем Египте в практических расчётах использовали дроби с числителем 1: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ и т. д. Для них существовали специальные обозначения. Дроби с числителем, отличным от единицы (кроме

дроби $\frac{2}{3}$), появились значительно позже. Поэтому, например, дробь $\frac{5}{8}$ выражали как сумму двух дробей: $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{8}$.

В Индии дроби записывали так же, как мы это делаем сейчас, но черту дроби не писали. Дроби отделяли друг от друга вертикальными и горизонтальными линиями. Например, дробь $\frac{1}{2}$ записывали так: $\boxed{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}}$.

Знака «+» для записи суммы в то время ещё не существовало, и сумму $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ записывали так: $\boxed{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}} \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}}$.

Кроме обыкновенных дробей, в Индии умели записывать и смешанные дроби. Дробь $3\frac{2}{5}$ записывали так: $\boxed{\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}}$.

Целую часть писали над дробью. Иногда целое число изображали дробью со знаменателем 1.

Ту же дробь $3\frac{2}{5}$ записывали так: $\boxed{\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}} \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}}$, что соответствовало сумме $\frac{3}{1} + \frac{2}{5}$, или $3 + \frac{2}{5}$.

Одним из примеров практического применения дробей может служить нотная запись в музыке. Здесь фактически используется понятие дроби и даже сложение дробей. Так, длительности половинные, четвертные и восьмые соответствуют дробям $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, а схема длительностей (рис. 175) соответствует суммам $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$.



Рис. 175

Обозначение $\text{д} \cdot$ (нота с точкой) используется для увеличения длительности наполовину. Например, $\text{д} \cdot = \text{д} + \text{д}$, что соответствует равенству $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.



Рис. 176

Музыкальное произведение состоит из одинаковых по длительности отрезков — тактов. Длительность каждого такта определяет его размер. Он обозначается дробью, так как нижняя цифра обозначает длительность доли (на рисунке 176 — четвертная), а верхняя цифра — количество долей в такте (две доли). Отличие заключается в том, что черту дроби не пишут и дробь не сокращают.

3 АНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1068. В старых русских руководствах по арифметике использовали такие названия дробей:

$\frac{1}{2}$ — половина, $\frac{1}{4}$ — четь, $\frac{1}{8}$ — полчеть,

$\frac{1}{16}$ — полполчеть, $\frac{1}{32}$ — полполполчеть.

Определите, каким дробям соответствовали тогда названия: треть, полтреть, полполтреть, полполполтреть.



1069. Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Купил полторажды полтора аршина, дал полтретьяжды полтретьи гривны. Сколько надо дать за полдевятижды полдевяти аршина?

Примечание. На Руси некоторые смешанные дроби имели свои названия: $1\frac{1}{2}$ — полтора, $2\frac{1}{2}$ — полтрети, $3\frac{1}{2}$ — полчетверта, $4\frac{1}{2}$ — полпята и т. д.

В задаче упоминаются произведения дробей:

$$1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}; \quad 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}; \quad 8\frac{1}{2} \cdot 8\frac{1}{2}.$$

1070. *Ананий из Ширака (Армения, VII в.).* В городе Афины был водоём, в который проведены три трубы. Одна из труб может наполнить водоём за один час, другая, более тонкая, — за два часа, третья, ещё более тонкая, — за три часа. Итак, узнай, за какую часть часа все три трубы вместе наполняют водоём.

Примечание. Ананий дал такой ответ: $\frac{1}{4} \frac{1}{6} \frac{1}{12} \frac{1}{22}$. Используйте его для проверки своего решения.

1071. За 11 к. куплены одна пятириковая и одна шестириковая стеариновые свечи. Сколько стоит фунт стеариновых свечей? (Пятириковая свеча весила $\frac{1}{5}$, а шестириковая — $\frac{1}{6}$ фунта.)

1072. *Из египетских папирусов.* а) Количество и его четвёртая часть дают вместе 15. Найдите количество.
б) Число и его половина составляют 9. Найдите число.

1073. Составьте задачу, аналогичную египетским задачам, и решите её двумя способами.

1074. Разделите полтину на половину.

1075. Можно ли число 1 представить в виде суммы дробей: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$, где a, b, c, d — нечётные натуральные числа?

1076. *Задача-шутка.* Из верхнего угла комнаты вниз по стене поползли две мухи. Спустившись до пола, они поползли обратно. Первая муха ползла вниз и вверх с одинаковой скоростью, а вторая муха хоть и поднималась в два раза медленнее первой, но зато спускалась вдвое быстрее её. Какая из мух раньше приползёт обратно?

1077. а) На столе лежало несколько книг. Когда взяли половину всех книг и ещё одну книгу, то осталось две книги (рис. 177). Сколько книг лежало на столе первоначально?

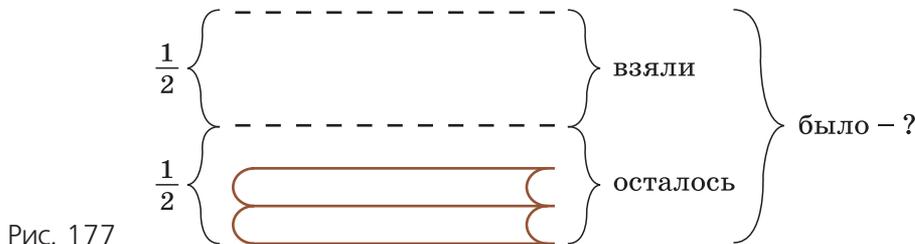


Рис. 177

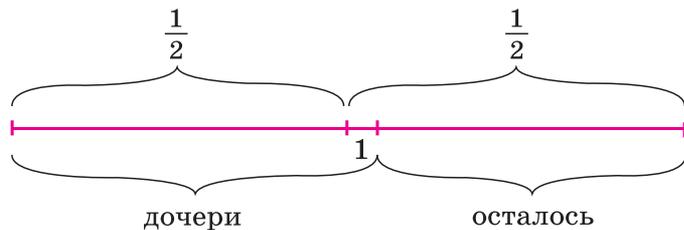


Рис. 178

б) Мама дала детям конфеты: дочери половину всех конфет и ещё одну (рис. 178), сыну половину остатка и последние 5 конфет. Сколько всего конфет мама дала детям?



1078. а) Отец даёт денег своим детям. Старшему — половину всего и 1 р., среднему — половину остатка и ещё 1 р., младшему — половину остатка и последние 3 р. Сколько было денег?

б) Крестьянин, покупая товары, уплатил первому купцу половину своих денег и ещё 1 р.; второму купцу половину оставшихся денег да ещё 2 р. и, наконец, уплатил третьему купцу половину оставшихся денег да ещё 1 р. После этого денег у крестьянина совсем не осталось. Сколько денег было у крестьянина первоначально?

1079. а) У Васи есть три шоколадки (рис. 179). Он утверждает, что сможет взять половину имеющегося шоколада и ещё полшоколадки, не ломая ни одной из них. Сможет ли Вася выполнить своё обещание? Если сможет, то как?

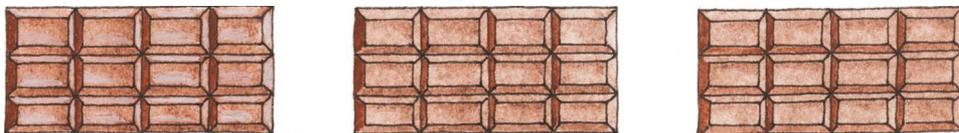


Рис. 179

б) В вазе лежало 5 яблок. Мальчик взял половину всех яблок и ещё пол-яблока. Сколько яблок взял мальчик?

в) В коробке лежали карандаши. Сестра взяла половину всех карандашей и ещё полкарандаша. Остальные 4 карандаша взял брат. Сколько карандашей было в коробке первоначально?



1080. Крестьянка продавала на рынке яйца. Первая покупательница купила у неё половину яиц и ещё пол-яйца, вторая — половину остатка и ещё пол-яйца, а третья — последние 10 яиц. Сколько яиц принесла крестьянка на рынок?



1081. К табунщику пришли три казака покупать лошадей. «Хорошо, я вам продам лошадей, — сказал табунщик, — первому продам я полтабуна и ещё половину лошади, второму — половину оставшихся лошадей и ещё пол-лошади, третий также получит половину оставшихся лошадей и ещё пол-лошади. Себе же оставлю только 5 лошадей». Удивились казаки: как это табунщик будет делить лошадей пополам? Но после некоторых размышлений они успокоились, и сделка состоялась. Сколько же лошадей продал табунщик каждому из казаков?



1082. У Саши на дне рождения было 5 друзей. Первому он отрезал $\frac{1}{6}$ часть пирога, второму — $\frac{1}{5}$ остатка, третьему — $\frac{1}{4}$ того, что осталось, четвёртому — $\frac{1}{3}$ нового остатка. Последний кусок Саша разделил поровну с пятым другом. Кому достался самый большой кусок?



1083. а) В нашем классе есть певцы и танцоры: $\frac{1}{5}$ всех певцов ещё и танцует, а $\frac{1}{4}$ танцоров ещё и поёт. Кого у нас в классе больше: певцов или танцоров?

б) В делегации иностранных гостей $\frac{1}{6}$ говорящих по-английски говорит и по-немецки, а $\frac{1}{5}$ говорящих по-немецки говорит и по-английски. Кого больше: говорящих по-немецки или говорящих по-английски?

в) В делегации иностранных гостей $\frac{1}{8}$ англичан знала немецкий язык, а $\frac{1}{7}$ немцев знала английский. Кого в делегации больше: немцев или англичан? Можно ли ответить на вопрос задачи?

1084. Легковая машина может проехать расстояние между двумя городами за $3\frac{1}{3}$ ч, а грузовая — за 5 ч. Машины выехали из этих городов одновременно навстречу друг другу. Через сколько часов после начала движения они встретятся?



1085. *Задача Метродора.* Корона весит 60 мин (греческая мера веса и денег) и состоит из сплава золота, меди, олова и железа. Золото и медь составляют $\frac{2}{3}$, золото и олово — $\frac{3}{4}$, золото и железо — $\frac{3}{5}$ общего веса. Определите вес каждого металла в отдельности.

1086. а) Вася сказал, что у них в классе 35 учащихся, причём $\frac{2}{3}$ всех учащихся — девочки. Папа сказал, что такого не может быть. Почему?

б) Известно, что $\frac{8}{15}$ класса учится на «4» и «5». Сколько учащихся может быть в классе?

в) Известно, что $\frac{1}{8}$ класса — отличники, а $\frac{3}{5}$ класса — девочки. Сколько учащихся может быть в классе?

г) Известно, что $\frac{3}{5}$ класса — девочки, $\frac{1}{7}$ из них — отличницы. Сколько учащихся может быть в классе?

***1087.** а) В классе послушных девочек столько же, сколько непослушных мальчиков. Кого в классе больше: послушных детей или мальчиков?

б) В классе высоких мальчиков столько же, сколько невысоких девочек. Кого в классе больше: высоких детей или девочек; невысоких детей или мальчиков?

***1088.** Два охотника отправились одновременно навстречу друг другу из двух деревень, расстояние между которыми 18 км. Первый шёл со скоростью 5 км/ч, а второй — 4 км/ч. Первый охотник взял с собой собаку, которая бежала со скоростью 8 км/ч. Собака сразу же побежала навстречу второму охотнику, встретила его, повернула и с той же скоростью побежала навстречу своему хозяину. Встретила его, повернула и побежала навстречу второму охотнику и т. д. Так она бегала от одного охотника к другому, пока те не встретились. Сколько километров пробежала собака?



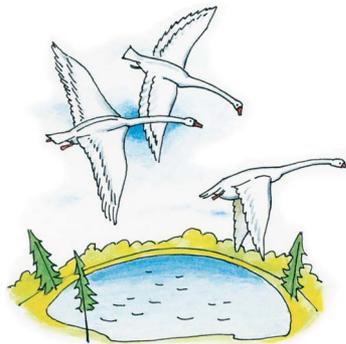
1089. Вычислите:

$$\frac{92 \cdot 93 \cdot 94 - 91 \cdot 92 \cdot 93}{93 \cdot 94 \cdot 95 - 92 \cdot 93 \cdot 94}$$

1090. Папа и сын стартовали одновременно на двух соседних дорожках плавательного бассейна. Папа первым доплыл до конца дорожки, развернулся и поплыл навстречу сыну. Через сколько минут после старта они встретятся, если длина дорожки бассейна 25 м и скорости папы и сына равны 14 м/мин и 11 м/мин соответственно?

1091. а) Летела стая гусей. На первом озере села половина стаи и ещё полгуса, а на втором — остальные 8 гусей. Сколько гусей было в стае?

б) Над озёрами летели гуси. На каждом озере садилась половина гусей и ещё полгуса, остальные летели дальше. Все сели на семи озёрах. Сколько было гусей?



1092. Первый рабочий выполнил $\frac{1}{4}$ задания, второй — $\frac{1}{3}$ остатка, третий — $\frac{1}{2}$ остатка, а четвёртый выполнил задание до конца. Какой из рабочих выполнил больший объём работы?

1093. На первом экзамене в институт получили двойки $\frac{1}{7}$ всех абитуриентов, на втором экзамене — $\frac{1}{8}$ остальных абитуриентов, на третьем экзамене — $\frac{1}{9}$ оставшихся абитуриентов. Какая часть всех абитуриентов сдала три экзамена без двоек?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Выполните действия (1094—1100).

- 1094.** а) $325 + 723$; б) $729 + 628$; в) $615 + 876$;
г) $359 + 987$; д) $354 - 221$; е) $284 - 139$;
ж) $923 - 281$; з) $725 - 189$.

- 1095.** а) $39 \cdot 48$; б) $75 \cdot 324$; в) $74 \cdot 506$;
г) $708 \cdot 807$; д) $294 : 7$; е) $276 : 23$;
ж) $2842 : 49$; з) $11\,328 : 16$.

- 1096.** а) $450 \cdot 240 - 1200 \cdot 45 - 4500 \cdot 12 + 5$;
б) $(4750 : 19 - 19 \cdot 13) \cdot 84 - 242$;
в) $(723\,600 : 90 - 40 \cdot 201) \cdot (1234 \cdot 4321 - 1999) + 5$;
г) $1998 \cdot 1999 - 1998^2 - 1993$.

- 1097.** а) $9357 - 7288 + 3579 + 7290 - 3578$;
б) $5544 : 88 - 5481 : 87 + 5454 : (100 - 46)$.

- 1098.** а) $354 \cdot 49 : 1239 + 357 \cdot 48 : 56$;
б) $56 \cdot 749 : 49 - 836 : 44 \cdot 45$.

- 1099.** а) $938 + 356 - 356 - 938$;
б) $328 \cdot 72 - 72 \cdot 328$;
в) $728 \cdot 357 : 357 + 2$;
г) $432 \cdot 724 : 432 : 724$.

- 1100.** а) $35 \cdot 17 - 35 \cdot 16 + 65 \cdot 99 - 65 \cdot 98$;
б) $79 \cdot 23 + 21 \cdot 23 - (23 \cdot 123 - 23 \cdot 23)$.

*Из «Сборника задач и упражнений»
Е. С. Березанской.*



Выполните действия (1101, 1102).

- 1101.** а) $((16\,000 : 32 - 1640 : 82) : 15 \cdot 7000 - 192\,000) : 40$;
б) $((97\,264 : 8 + 1\,284\,200 : 100) : 1000 \cdot 7 + 947) \cdot 100$;
в) $((24 \cdot 250 + 18 \cdot 350) : 60 \cdot 400 + (44 \cdot 4500 + 108 \cdot 1500) : 20) : 400$;
г) $(64 \cdot 125 + 128 \cdot 75) : 800 \cdot 5000 - (300 \cdot 400 + 5107 \cdot 800) : 70$;
д) $(24\,347\,420 : 8105 + 572\,580 : 180) \cdot 504 + 18\,999\,380 : 9223$;
е) $(31\,440 + 1040 : (150 - 2400 : (67 + 53))) \cdot 20) : 395 + 1001$;
ж) $960 : (2000 : (10\,002 - (6085 + 2926) - 966))$;
з) $\frac{(367\,710 : 35 - 2\,335\,242 : 329) \cdot 375}{((16\,531 \cdot 343 + 763 \cdot 1099) : 718 - 65) \cdot 71}$;
и) $\frac{(41811 : 1267 + 506 \cdot (3000 - 2877)) : 153}{(1293\,516 : 1827 - 608\,597 : 907) \cdot 11}$.

1102. а) $\frac{48 \cdot 35 + 20}{45 \cdot 37 + 35} - \frac{731 : 17 + 2109 : 37}{3942 : 54 + 1755 : 65}$;

б) $\frac{53 \cdot 35 - 221}{646 : 17} - \frac{46 \cdot 64 - 1306}{702 : 18} + \frac{16\,807 : 7}{343 \cdot 7}$.

1103. Из чисел

325, 729, 256, 428, 720, 1233

выберите числа, кратные:

а) 2; б) 3; в) 5; г) 9; д) 10.

1104. Делится ли сумма:

а) $3295 + 4890$ на 5;

б) $324 + 891$ на 9;

в) $3630 + 336 \cdot 49$ на 3;

г) $17 \cdot 254 + 19 \cdot 132$ на 2?

1105. Делится ли разность:

а) $3210 - 1230$ на 3;

б) $7470 - 333$ на 9;

в) $14\,900 \cdot 17 - 2586$ на 2;

г) $4258 \cdot 125 - 350 \cdot 729$ на 10?



Доказываем

1106. Докажите, что выражение:

а) $45 \cdot 38 + 45 \cdot 11$ делится на 49;

б) $48 \cdot 56 - 48 \cdot 39$ делится на 17;

в) $725 \cdot 47 - 47 \cdot 701$ делится на 12;

г) $289 \cdot 376 - 289 \cdot 327$ делится на 7;

д) $17 \cdot 386 - 17 \cdot 254 + 17 \cdot 138$ делится на 10.

1107. Сократите дробь:

а) $\frac{48}{96}$;

б) $\frac{160}{240}$;

в) $\frac{64}{128}$;

г) $\frac{75}{225}$;

д) $\frac{80}{100}$;

е) $\frac{384}{640}$;

ж) $\frac{385}{440}$;

з) $\frac{204}{225}$;

и) $\frac{182}{208}$;

к) $\frac{304}{380}$;

л) $\frac{750}{1875}$;

м) $\frac{2688}{3456}$.

1108. Найдите целую часть дроби:

а) $\frac{15}{3}$;

б) $\frac{75}{5}$;

в) $\frac{89}{16}$;

г) $\frac{98}{13}$;

д) $\frac{124}{11}$;

е) $\frac{123}{15}$;

ж) $\frac{404}{45}$;

з) $\frac{459}{45}$;

и) $\frac{459}{54}$;

к) $\frac{363}{22}$;

л) $\frac{125}{19}$;

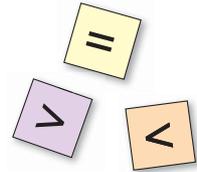
м) $\frac{856}{41}$.

1109. Обратите смешанную дробь в обыкновенную дробь:

- а) $5\frac{3}{8}$; б) $9\frac{2}{3}$; в) $4\frac{3}{5}$; г) $7\frac{7}{10}$;
д) $5\frac{4}{5}$; е) $13\frac{19}{20}$; ж) $8\frac{9}{10}$; з) $7\frac{1}{100}$;
и) $16\frac{12}{17}$; к) $17\frac{5}{6}$; л) $19\frac{99}{100}$; м) $7\frac{357}{1000}$.

1110. Сравните дроби:

- а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{\frac{2}{3}}$; б) $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{\frac{3}{2}}$; в) $\frac{1}{3}$ и $\frac{4}{\frac{3}{2}}$.



Выполните действия (**1111–1114**).

- 1111.** а) $\frac{2}{9} + \frac{3}{7}$; б) $\frac{7}{8} + \frac{3}{4}$; в) $\frac{5}{24} + \frac{25}{36}$;
г) $\frac{59}{60} + \frac{39}{40}$; д) $3\frac{1}{8} + 2\frac{1}{7}$; е) $5\frac{1}{6} + 1\frac{2}{3}$.

- 1112.** а) $\frac{3}{5} - \frac{1}{7}$; б) $\frac{5}{3} - \frac{4}{9}$; в) $\frac{24}{25} - \frac{7}{15}$;
г) $\frac{11}{80} - \frac{11}{90}$; д) $5 - 2\frac{1}{13}$; е) $8\frac{1}{7} - 3\frac{1}{9}$.

- 1113.** а) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$; б) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{27}$; в) $\frac{15}{16} \cdot \frac{8}{9}$;
г) $5 \cdot \frac{2}{11}$; д) $\frac{3}{5} \cdot 1\frac{2}{3}$; е) $3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{7}$.

- 1114.** а) $\frac{4}{5} : \frac{3}{7}$; б) $\frac{45}{46} : \frac{15}{23}$; в) $8 : \frac{5}{7}$;
г) $\frac{3}{11} : 9$; д) $8\frac{1}{3} : \frac{5}{9}$; е) $3\frac{1}{2} : 2\frac{1}{3}$.

Из «Сборника арифметических задач и численных примеров»
В. А. Евтушевского.

Выполните действия (**1115–1135**).

1115. $\frac{340}{567} + \frac{29}{42} + \frac{43}{54} + \frac{74}{81} - \left(\frac{53}{60} - \frac{37}{84}\right) - \left(\frac{3}{14} + \frac{12}{35}\right)$.

1116. $\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{8}\right) : \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{8} + \frac{7}{20}\right) : 1\frac{9}{20}$.

$$1117. 1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{4}{7} : 4\frac{1}{2} + 2\frac{2}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{8}.$$

$$1118. \frac{7}{20} \cdot 9 + 12 \cdot \frac{7}{36} + 1\frac{8}{15} : 4 + \frac{3}{5} : 4\frac{1}{2}.$$

$$1119. 18\frac{21}{53} \cdot \frac{27}{34} \cdot 42\frac{2}{5} \cdot 47\frac{2}{9} - \frac{125}{161} \cdot 8\frac{216}{617} \cdot 15\frac{17}{40} \cdot 22\frac{31}{36}.$$

$$1120. \left(4\frac{23}{63} \cdot 8\frac{37}{55} - 16\frac{1}{5} : \frac{21}{25}\right) \cdot 14\frac{8}{11} : \frac{26}{77} \cdot \frac{1}{405}.$$

$$1121. \left(\frac{34}{81} \cdot 85\frac{13}{17} - 4\frac{7}{8} \cdot \frac{80}{117}\right) \cdot \left(29\frac{11}{35} \cdot 52\frac{1}{2} - 121\frac{5}{19} \cdot 3\frac{9}{16}\right).$$

$$1122. \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{10} : \left(\frac{15}{16} \cdot \frac{14}{39} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{13}{21}\right) : \left(2\frac{1}{8} \cdot 2\frac{2}{7} \cdot 2\frac{15}{17} \cdot 4\frac{2}{3} : 196\right).$$

$$1123. \left(\frac{353}{360} - \frac{113}{160}\right) \cdot \left(\frac{211}{225} - \frac{101}{135}\right) - 26\frac{1}{3} : 75 \cdot \left(1\frac{1}{3} : 9\right).$$

$$1124. \left(\frac{2}{7} : \frac{3}{7} + \left(4\frac{1}{2} - 3\frac{5}{6}\right) \cdot 3\frac{1}{3}\right) : \left(6\frac{1}{2} : 9\right).$$

$$1125. \left(7 : \frac{5}{6} - 8\frac{1}{9}\right) \cdot 2\frac{2}{5} : \left(\left(\frac{3}{8} + \frac{5}{6} + \frac{5}{12}\right) \cdot \frac{8}{25}\right).$$

$$1126. \left(\left(\frac{32}{57} + \frac{27}{38}\right) \cdot \frac{19}{29} + \left(\frac{25}{26} + \frac{48}{65}\right) \cdot \frac{10}{51} + \left(\frac{74}{75} + \frac{49}{50}\right) \cdot \frac{15}{59}\right) \cdot \frac{3}{5}.$$

$$1127. \left(\left(12\frac{1}{2} - 2\right) : \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{40}\right) - \left(2 + 6\frac{2}{3}\right) : \left(1\frac{5}{6} - 1\frac{2}{3}\right)\right) \cdot \frac{3}{8}.$$

$$1128. \left(\frac{3}{17} + \frac{5}{34} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{11}{28}\right) : \left(9 : \frac{6}{11} - 148\frac{1}{4} : 9\right).$$

$$1129. \left(16 : 1\frac{1}{3} - 4\frac{5}{9} + 2\frac{3}{4} : 11 + 3\frac{1}{4}\right) : \left(\left(7\frac{1}{3} - 6\frac{5}{9}\right) \cdot \frac{5}{28}\right).$$

$$1130. \left(8\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\right) : 3\frac{1}{2} : \left(\left(5 - 4\frac{2}{5}\right) \cdot 10\right) + \left(3\frac{1}{8} - 1\frac{7}{8}\right) \cdot 1\frac{3}{5} : \left(\left(2 - 1\frac{3}{8}\right) : 3\frac{1}{8}\right).$$

$$1131. \frac{\frac{3}{4} - \frac{7}{12}}{\frac{3}{5} - \frac{3}{10}} + \frac{\frac{9}{10} - \frac{7}{8}}{\frac{7}{8} - \frac{5}{6}} + \frac{2 + 2\frac{2}{5}}{\frac{3}{4} + \frac{3}{7}}.$$

$$1132. \frac{\left(53\frac{3}{4} + 9\frac{1}{6}\right) \cdot 1\frac{1}{5} - \left(6\frac{4}{5} - 3\frac{3}{7}\right) \cdot 5\frac{5}{6}}{\left(10\frac{3}{10} - 8\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{9} - 3\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}} - 29\frac{5}{6}.$$

$$1133. \frac{\left(28 : 1\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3} : 22 + 1\frac{2}{3} \cdot 9\frac{3}{11} + 4 : 1\frac{1}{2}\right) \cdot 3\frac{1}{7}}{67\frac{1}{7} - 47 \cdot \frac{2}{7}}.$$

$$1134. \frac{\left(\left(6\frac{2}{3} + 2\frac{4}{15} + 5\frac{1}{2}\right) : \frac{1}{15} - 30 : \frac{5}{28}\right) : 2\frac{3}{4}}{\left(5 \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{22}\right) : 42\frac{1}{2}}.$$

$$1135. \frac{\left(\frac{23}{36} + \frac{31}{63} - \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{21}\right)\right) \cdot \left(48 : \left(\frac{3}{5} : \frac{7}{8}\right)\right)}{\left(\frac{19}{26} + \frac{14}{39} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(54\frac{1}{6} : \left(8\frac{4}{7} : \frac{12}{35}\right)\right)}.$$

1136. Из «Сборника задач и упражнений» Е. С. Березанской.

Выполните действия:

а) $\left(3\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3} + 4\frac{2}{3} : 3\frac{1}{2}\right) \cdot 4\frac{4}{5};$

б) $3\frac{1}{8} : \left(\left(4\frac{5}{12} - 3\frac{13}{24}\right) \cdot \frac{4}{7} + \left(3\frac{1}{18} - 2\frac{7}{12}\right) \cdot 1\frac{10}{17}\right);$

в) $2\frac{3}{4} : \left(\left(4\frac{5}{7} - 1\frac{11}{14}\right) \cdot 4\frac{2}{3} + \left(3\frac{2}{9} - 1\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{18}{25}\right);$

г) $\left(15 : 3\frac{3}{4} - \left(10\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{14}\right) : \left(1\frac{23}{52} - 1\frac{1}{4}\right);$

д) $\frac{\left(\frac{7}{15} + \frac{14}{45} + \frac{2}{9}\right) \cdot 10\frac{1}{3} - 1\frac{1}{11} \cdot \left(2\frac{2}{3} - 1\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{28} - 1};$

е) $\frac{15 : \frac{5}{18} : 3\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{16} + \frac{11}{36} + \frac{5}{48} + \frac{5}{18}\right)}{\left(11\frac{5}{11} - 8\frac{21}{22}\right) : 1\frac{2}{3}}.$



1137. а) На экскурсию поехало в 3 раза больше девочек, чем мальчиков. Сколько девочек было среди 56 учащихся, поехавших на экскурсию?

б) Дедушке в 7 раз больше лет, чем внуку, который моложе дедушки на 48 лет. Сколько лет дедушке?

в) Под картофель в хозяйстве занята в 5 раз бóльшая площадь, чем под морковь, а всего под картофель и морковь занято 27 га. Какая площадь занята под картофель?

1138. а) В коллекции 357 марок, причём российских марок на 45 больше, чем иностранных. Сколько в коллекции российских марок?

б) У Васи было 28 р. Он потратил на 10 р. больше, чем у него осталось. Сколько денег у него осталось?

в) В автобусе ехало 55 человек. На остановке вышло на 7 человек меньше, чем осталось. Сколько человек осталось?

г) В магазин привезли 200 кг яблок. До обеда было продано на 12 кг больше, чем осталось. Сколько килограммов яблок было продано до обеда?



1139. Задачи С. А. Рачинского. а) Я дал одному ученику 3 ореха, а всем остальным по 5. Если бы я всем дал по 4 ореха, у меня осталось бы 15. Сколько было орехов?

б) В школе равное число девочек и мальчиков. Я принёс 234 ореха, и каждому мальчику досталось по 5 орехов, каждой девочке — по 4 ореха. Но девочки обиделись, и в другой раз я принёс столько орехов, что всем досталось по 6. Сколько орехов я принёс?



1140. Из «Азбуки» Л. Н. Толстого. Пять братьев разделили после отца наследство поровну. В наследстве было три дома. Три дома нельзя было делить, их взяли старшие три брата. А меньшим за то выделили деньги. Каждый из старших заплатил по 800 р. меньшим. Меньшие разделили эти деньги между собою, и тогда у всех братьев стало поровну. Много ли стоили дома?

1141. В бочке было 40 вёдер воды. Когда из бочки отлили несколько вёдер, то воды осталось в 7 раз больше, чем отлили. Сколько вёдер отлили?



1142. (Индия, III—IV вв.). Из четырёх жертвователей второй дал вдвое больше первого, третий — втрое больше второго, четвёртый — вчетверо больше третьего, все вместе дали 132. Сколько дал первый?



1143. а) Мама раздала детям по четыре конфеты, и три конфеты остались лишними. Чтобы дать детям по пять конфет, двух конфет не хватит. Сколько детей?

б) В вазы поставили по пять роз, и две розы остались лишними. Чтобы поставить по шесть роз, четырёх роз не хватит. Сколько ваз?

*1144. а) Если выдать учащимся по 2 тетради, то 19 тетрадями останутся лишними. А если выдать по 3 тетради, шести тетрадями не хватит. Сколько учащихся? Сколько тетрадями?

б) В актовом зале школы привезли стулья. Если их расставить по 25 штук в ряд, то четырёх стульев не хватит. Если же их расставить по 24 стула в ряд, то двенадцать стульев останется. Сколько стульев?

*1145. Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона. Некто желает распределить между бедными деньги. Если бы у него было на восемь динаров больше, то он мог бы дать каждому по три, но он раздаёт лишь по два, и у него ещё остаётся три. Сколько бедных?

*1146. а) Для детского сада купили 20 пирамид: больших и маленьких — по 7 и по 5 колец (рис. 180). У всех пирамид 128 колец. Сколько больших пирамид?

б) В детском саду 20 велосипедов — трёхколёсных и двухколёсных. У всех велосипедов 55 колёс. Сколько двухколёсных велосипедов в детском саду?

*1147. Вася посчитал, что если каждая девочка посадит по 3 дерева, а каждый мальчик — по 5 деревьев, то все 30 учащихся класса посадят 122 дерева. Сколько в классе мальчиков?

1148. Древнекитайская задача. В клетке сидят фазаны и кролики. У них вместе 35 голов и 94 ноги. Сколько фазанов и сколько кроликов в клетке?

1149. У юного биолога в аквариуме жили жуки и пауки. Всего их было 5, и у них было 34 ноги. Сколько жуков было в аквариуме?



Рис. 180



1150. а) Крестьянин хочет купить лошадь и для этого продаёт рожь. Если он продаст 15 ц ржи, то ему не хватит для покупки лошади 80 рублей, а если он продаст 20 ц ржи, то после покупки лошади у него останется 110 рублей. Сколько стоит лошадь?

б) Некий человек покупал масло. Когда он давал деньги за 8 бочек масла, то у него осталось 20 алтын. Когда же стал давать за 9 бочек, то не хватило полтора рубля с гривною. Сколько денег было у человека?

* **1151.** а) *Старинная задача.* За 1000 р. я купил 44 коровы — по 18 р. и по 26 р. Сколько тех и других?

б) *Из рассказа А. П. Чехова «Репетитор».* Купец купил 138 аршин чёрного и синего сукна за 540 р. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 р. за аршин, а чёрное — 3 р.

1152. *Из «Арифметики» А. П. Киселёва.* а) Смешано три сорта муки: 15 фунтов по 8 к., 20 фунтов по 7 к. и 25 фунтов по 4 к. за фунт. Сколько стоит фунт смеси?

б) Из двух сортов чаю составлено 32 фунта смеси; фунт первого сорта стоит 3 р., фунт второго сорта 2 р. 40 к. Сколько фунтов взято от того и другого сорта, если фунт смешанного чаю стоит 2 р. 85 к.?

* **1153.** *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Некто купил 112 баранов старых и молодых, дал 49 рублей и 20 алтын. За старого он платил по 15 алтын и по 2 деньги, а за молодого — по 10 алтын; узнайте, сколько старых и сколько молодых баранов купил он.

1154. Купец купил 110 фунтов табака. 50 фунтов оказались подмоченными, и купец продал их на 2 р. дешевле за 1 фунт, чем заплатил сам. Остальной табак он продал на 3 р. дороже за 1 фунт, чем уплатил сам. Подсчитайте прибыль купца.



* **1155.** а) На двух полках стояло 12 книг. Когда с первой полки на вторую переставили столько книг, сколько до этого стояло на второй полке, то книг на полках стало поровну. Определите, сколько книг первоначально стояло на первой полке и сколько — на второй.

б) У Светы и Наташи вместе было 8 яблок. Света дала Наташе столько яблок, сколько было у Наташи. Потом Наташа дала Свете столько яблок, сколько осталось у Светы. После этого у девочек яблок стало поровну. Сколько яблок первоначально было у каждой девочки?

в) Трое мальчиков имеют по некоторому количеству яблок. Первый мальчик даёт другим столько яблок, сколько каждый из них имеет. Затем второй мальчик даёт двум другим столько яблок, сколько каждый из них имеет; наконец, третий даёт каждому из двух столько яблок, сколько есть у каждого в этот момент. После этого у мальчиков оказалось по 8 яблок. Сколько яблок было вначале у каждого мальчика?

***1156.** а) За краски и две кисти заплатили 32 р. 19 к., за краски и кисть — 21 р. 72 к. Сколько стоят краски? Сколько стоит кисть?
б) За две тетради и ручку заплатили 6 р. 66 к., а за тетрадь и две ручки заплатили 9 р. 93 к. Сколько стоит тетрадь? Сколько стоит ручка?

в) За три линейки и угольник заплатили 11 р. 20 к., а за линейку и три угольника заплатили 22 р. 40 к. Сколько стоит линейка? Сколько стоит угольник?

***1157.** Три утёнка и четыре гусёнка весят 2 кг 500 г, а четыре утёнка и три гусёнка весят 2 кг 400 г. Сколько весит гусёнок?

1158. а) Две бригады убрали картофель с площади 12 га за 4 дня. Первая бригада может выполнить эту работу за 6 дней. За сколько дней вторая бригада может выполнить ту же работу?
б) В рукописи 42 страницы. Одна машинистка перепечатывает рукопись за 3 ч, а вторая — за 6 ч. За сколько часов машинистки перепечатали бы рукопись при совместной работе?

в) Бак вмещает 600 л воды. Через первый кран его можно заполнить за 10 мин, а через второй — за 15 мин. За сколько минут можно заполнить бак через оба крана?

г) Скорый поезд проезжает расстояние между двумя городами, равное 900 км, за 10 ч, а товарный — за 15 ч. Через сколько часов встретятся поезда, если одновременно выйдут из этих городов навстречу друг другу?

1159. а) Токарь может обточить 72 заготовки за 3 ч, а его ученику на выполнение той же работы потребуется в 2 раза больше времени. За сколько часов они обточат 144 такие же заготовки при совместной работе?

б) На первом станке можно отштамповать 480 деталей за 4 ч, а на втором станке на выполнение той же работы потребуется в 3 раза больше времени. За какое время можно отштамповать 960 деталей при совместной работе двух станков?

1160. Алёша и Боря вместе весят 82 кг, Алёша и Вова весят 83 кг, Боря и Вова весят 85 кг. Сколько весят вместе Алёша, Боря и Вова?



1161. а) Четверо купцов имеют некоторую сумму денег. Известно, что, сложившись без первого, они соберут 90 р.; сложившись без второго, — 85 р.; сложившись без третьего, — 80 р.; сложившись без четвертого, — 75 р. Сколько у кого денег?

б) Отец имеет семь сыновей. Сумма возрастов первого и четвертого сына равна 9 годам, первого и шестого — 8 годам, второго и пятого — 8 годам, второго и третьего — 9 годам, третьего и шестого — 6 годам, четвертого и седьмого — 4 годам, а седьмого и пятого — также 4 годам. Сколько лет каждому? (Возраст каждого из сыновей выражается натуральным числом.)



***1162.** Спортсмен плыл против течения реки. Проплывая под мостом, он потерял флягу. Через 10 мин пловец заметил пропажу и повернул обратно. Он догнал флягу у второго моста. Найдите скорость течения реки, если известно, что расстояние между мостами 1 км.

***1163.** Три соседки готовили обед на общей плите в коммунальной квартире. Первая принесла 10 поленьев, вторая — 8 поленьев, а у третьей дров не было — она угостила своих соседок, дав им 9 яблок. Как соседки должны поделить яблоки по справедливости?

1164. На солнышке грелись кошка и несколько котят. У всех у них лап на 24 больше, чем хвостов. Сколько котят было у кошки?

1165. Несколько торговцев продавали бананы по 24 р. за 1 кг, а один — по 21 р. 60 к. за 1 кг. Когда контролёры проверили его весы, то оказалось, что при весе 800 г они показывали ровно 1 кг. По какой цене на самом деле продавал бананы этот торговец?

1166. Из двух городов, расстояние между которыми 400 км, одновременно навстречу друг другу выехали два мотоциклиста. Определите их скорости, если известно, что они встретились через 4 ч и что скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого.

1167. а) Два пешехода вышли из одного пункта в противоположных направлениях со скоростями 4 км/ч и 5 км/ч. Через сколько часов между ними будет 45 км?

б) Расстояние между городами равно 510 км. Два поезда вышли из этих городов одновременно навстречу друг другу со скоростями 80 км/ч и 90 км/ч. Через сколько часов они встретятся?

в) Через сколько часов после начала движения расстояние между поездами в предыдущей задаче составит 170 км?

г) Скорость моторной лодки по течению 38 км/ч, а против течения — 33 км/ч. Какова скорость течения реки?

д) Расстояние между пристанями, равное 40 км, моторная лодка прошла по течению за $2\frac{1}{2}$ ч, против течения — за 4 ч. Какова скорость течения реки?

1168. а) В классе 32 учащихся, $\frac{3}{4}$ их числа учатся на «4» и «5». Сколько учащихся учится на «4» и «5»?

б) В классе 18 человек учатся без троек — это составляет $\frac{3}{5}$ всех учащихся класса. Сколько учащихся в классе?

в) В классе 12 девочек и 16 мальчиков. Какую часть класса составляют девочки? Какую — мальчики?

1169. а) Первое слагаемое составляет $\frac{2}{3}$ второго, а их сумма равна 45. Найдите слагаемые.

б) Первое слагаемое составляет $\frac{2}{3}$ суммы и на 45 больше второго слагаемого. Найдите слагаемые.

в) Первое слагаемое равно 45, а второе составляет $\frac{2}{3}$ суммы двух слагаемых. Найдите сумму.

г) Вычитаемое составляет $\frac{2}{3}$ уменьшаемого, а их разность равна 45. Найдите уменьшаемое и вычитаемое.

1170. а) Из первого крана бак наполняется за 4 мин, а из второго — за 12 мин. За сколько минут наполнится бак, если открыть оба крана одновременно?

б) Грузовая машина проедет расстояние между городами за 60 мин, а легковая — за 40 мин. Через сколько минут встретятся машины, если выедут из этих городов одновременно навстречу друг другу?

в) Два пешехода вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились через 20 мин, а ещё через 25 мин первый пешеход пришёл в пункт B . Через сколько минут после встречи второй пешеход пришёл в пункт A ?

г) Если бы не было дырки в баке, то он наполнился бы из крана за 7 мин. Вся вода вытекает из полного бака за 56 мин. Определите, за сколько минут наполнится этот дырявый бак из того же крана. Считайте, что вода из бака вытекает равномерно.

1171. а) Половина книг школьной библиотеки — учебники. Шестая часть всех учебников — учебники математики. Какую часть от всех книг составляют учебники математики?

б) В классе 18 мальчиков и 16 девочек, $\frac{2}{9}$ мальчиков и $\frac{1}{4}$ девочек занимаются в литературном кружке. Сколько учащихся класса занимается в литературном кружке?

1172. а) У мальчика было 24 р. Он потратил $\frac{1}{4}$ этой суммы и $\frac{1}{2}$ остатка. Сколько денег он потратил?

б) Туристы отправились в поход. За три дня они прошли 48 км. В первый день туристы прошли $\frac{1}{4}$ всего расстояния, а во второй день — $\frac{5}{9}$ остатка. Сколько километров они прошли в третий день?



1173. Из «Азбуки» Л. Н. Толстого. Мужик вышел пешком из Тулы в Москву в 5 часов утра. В 12 часов выехал барин из Тулы в Москву. Мужик идёт 5 вёрст в каждый час, а барин едет 11 вёрст в каждый час. На какой версте барин догонит мужика?



1174. Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона. Два почтальона A и B находятся друг от друга на расстоянии 59 миль. Утром они отправляются друг другу навстречу. A проходит в 2 ч 7 миль, B — в 3 ч 8 миль, но B выходит часом позднее, чем A . Сколько миль пройдёт A до встречи с B ?



1175. Первая бригада может выполнить задание за 9 дней, а вторая — за 12 дней. Первая бригада работала над выполнением этого задания 3 дня, а потом вторая бригада закончила работу. За сколько дней выполнено задание?



1176. Расстояние между двумя пристанями по течению реки катер проходит за 8 ч, а плот — за 72 ч. Сколько времени потратит катер на тот же путь по озеру?

1177. а) Моторная лодка проходит расстояние между двумя пунктами A и B по течению реки за 2 ч, а плот — за 8 ч. Какое время затратит моторная лодка на обратный путь?

б) Плот плывёт от A до B 40 ч, а катер — 4 ч. Сколько часов катер плывёт от B до A ?



1178. Некто купил 96 гусей. Половину гусей он купил, заплатив по 2 алтына и 7 полушек за каждого гуся. За каждого из остальных гусей он заплатил по 2 алтына без полушки. Сколько стоит покупка?

1179. а) Первая и вторая бригады могли бы выполнить задание за 9 дней; вторая и третья бригады — за 18 дней; первая и третья бригады — за 12 дней. За сколько дней это задание могут выполнить три бригады, работая вместе?

б) В бассейн проведены три трубы. Через первые две трубы бассейн наполняется за 1 ч 10 мин; через первую и третью трубы он наполняется за 1 ч 24 мин, а через вторую и третью — за 2 ч 20 мин. За сколько минут наполнится бассейн через все три трубы?

в) По условию задачи а) определите, за сколько дней третья бригада сможет выполнить задание, работая отдельно.



1180. (*Китай, II в.*). Дикая утка от южного моря до северного моря летит 7 дней. Дикий гусь от северного моря до южного моря летит 9 дней. Однажды дикая утка и дикий гусь вылетели одновременно. Через сколько дней они встретятся?



1181. Из «Всеобщей арифметики» *И. Ньютона*. Трое рабочих могут выполнить некоторую работу, при этом A может выполнить её один раз за 3 недели, B — три раза за 8 недель, C — пять раз за 12 недель. Спрашивается, за какое время они смогут выполнить эту работу все вместе. (Считайте, что в неделе 6 рабочих дней по 12 ч.)

1182. а) Каждый день турист проходит $\frac{1}{3}$ намеченного маршрута. Какую часть маршрута он пройдёт за 2 дня; за $\frac{1}{2}$ дня; за $\frac{3}{4}$ дня?

б) Метр ткани стоит 96 р. Сколько стоит $\frac{3}{4}$ м; $\frac{2}{3}$ м ткани?

в) Некто купил $\frac{3}{4}$ аршина сукна и заплатил за них 3 алтына. Сколько надо заплатить за 100 аршин такого же сукна?

1183. На прямой отметили 5 точек. Сколько отрезков и сколько лучей при этом образовалось?

1184. Дан треугольник ABC . На стороне AB отметили точку M , на стороне BC — точку N , на стороне AC — точку K . На сколько частей разбивают треугольник ABC отрезки MC , NA и KB при различных положениях точек M , N и K ?

1185. Выразите в сантиметрах:

- а) 60 мм; б) 65 мм; в) 5 мм.

1186. Выразите в квадратных дециметрах:

- а) 500 см²; б) 50 см²; в) 5 см².

1187. Выразите в кубических метрах:

- а) 8000 дм³; б) 800 дм³; в) 80 дм³.

1188. Выразите в арах площадь прямоугольного участка земли, длина и ширина которого:

- а) 25 и 24 м; б) 75 и 32 м; в) 50 и 28 м.

1189. Какое расстояние проходит по озеру моторная лодка за 10 с, если её скорость:

- а) 60 м/мин; б) 120 м/мин; в) 180 м/мин; г) 132 м/мин?

1190. Какое расстояние проезжает автомашина за 20 с, если её скорость:

- а) 90 км/ч; б) 126 км/ч; в) 108 км/ч; г) 162 км/ч?

1191. Выразите в метрах в минуту:

- а) 60 км/ч; б) 120 км/ч; в) 72 км/ч; г) 48 км/ч.

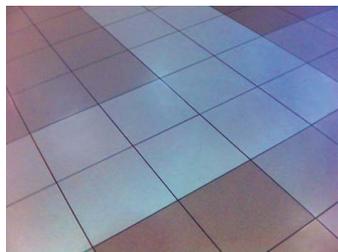
1192. Выразите в метрах в секунду:

- а) 300 м/мин; б) 420 м/мин; в) 600 м/мин;
г) 36 км/ч; д) 72 км/ч; е) 54 км/ч.

1193. а) Для укладки 100 м труб можно купить трубы длиной 3 м по 38 р. за штуку или длиной 4 м по 50 р. за штуку. Какие трубы обойдутся дешевле?

б) Для покрытия пола кафельной плиткой можно купить 8 упаковок по 36 плиток размером 15×15 см или 7 упаковок по 24 плитки размером 20×20 см. В каком случае будет больше отходов?

в) Для оклейки комнаты можно купить 8 кусков обоев шириной 50 см или 7 кусков обоев шириной 60 см. В каком случае будет больше отходов, если длина обоев в куске в обоих случаях 10 м? Какое условие задачи лишнее?



ИССЛЕДУЕМ

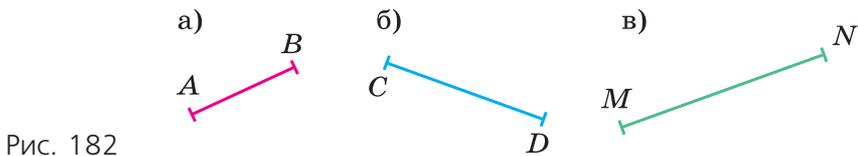
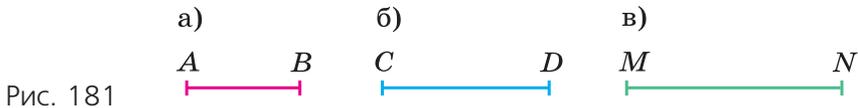
1194. Некто имел 99 м сетки для ограждения участка прямоугольной формы. Каковы должны быть размеры участка, чтобы он занимал наибольшую площадь, если ограда должна иметь калитку шириной 1 м?

1195. Некто хочет приобрести прямоугольный участок земли площадью 4 сотки. Какими могут быть длина и ширина этого участка? В каком случае периметр участка будет наименьшим?

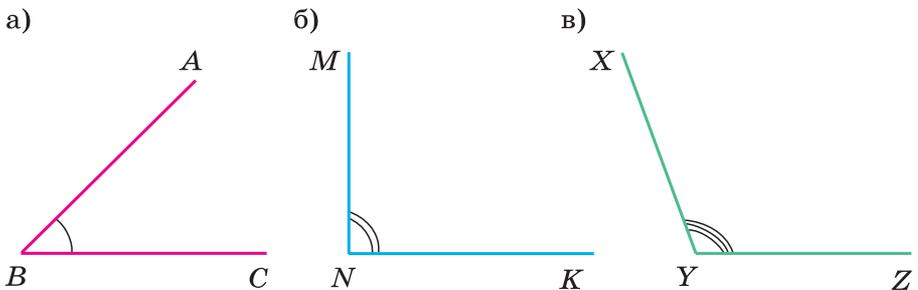
1196. В Московском метрополитене разрешается бесплатно провозить предметы, сумма трёх измерений которых не превышает 150 см. Какие размеры может иметь коробка, сумма измерений которой 150 см? В каком случае объём этой коробки будет наибольшим?

1197. Определите на глаз длину отрезка:

- а) в сантиметрах (рис. 181);
 б) в миллиметрах (рис. 182).
 Проверьте результат с помощью линейки.



1198. Определите на глаз величину угла (рис. 183). Проверьте результат с помощью транспортира.



1199. Постройте угол ABC , равный 90° . С помощью транспортира разделите угол ABC на:

- а) 2 равные части; б) 3 равные части.

1200. Постройте угол ABC , равный 120° . С помощью транспортира разделите угол ABC на два угла так, чтобы один угол был:

- а) в 2 раза больше другого; б) в 3 раза меньше другого;
в) на 20° больше другого; г) на 30° меньше другого.

1201. С помощью транспортира постройте угол величиной 100° . Из вершины угла проведите луч так, чтобы один из образовавшихся углов был:

- а) в 4 раза больше другого; б) на 20° больше другого.

Сколько решений имеет каждая из задач а) и б)?

1202. На сколько частей могут разбить круг три различные хорды?

1203. Постройте окружность и разделите её с помощью циркуля на:

- а) 6 равных частей; б) 3 равные части.

1204. Дана окружность, постройте равносторонний треугольник, вершины которого лежат на этой окружности.

1205. Плохо отрегулированные часы отстают в каждые $2\frac{1}{2}$ часа на

$\frac{1}{2}$ минуты. Стрелки часов поставили точно в 12.00 дня. Какое время покажут часы через 5 дней в 17.00? Через сколько суток часы отстанут ровно на 1 час?

Из «Сборника арифметических задач и численных примеров» В. А. Евтушевского.

Решите задачу (**1206—1213**).

1206. Я прочитал $\frac{3}{8}$ книги и ещё 52 страницы и заметил, что мне осталось прочесть ещё $\frac{1}{2}$ книги без 12 страниц. Сколько страниц в книге?

1207. Из крепости по случаю торжества стреляли в продолжение $\frac{5}{8}$ ч так, что один выстрел следовал за другим через $\frac{3}{4}$ мин. Сколько выстрелов сделано?

1208. Два обоза вышли из города в одно время. Один в каждые 4 ч делает $12\frac{8}{15}$ версты, а другой в каждые 3 ч делает $9\frac{4}{5}$ версты. Какой обоз пройдёт больше другого за 15 ч и на сколько?

 **1209.** Три крестьянки привезли на рынок масло: одна 4 кадки по $\frac{5}{12}$ пуда в каждой, вторая 2 кадки по $\frac{2}{3}$ пуда, а всё масло третьей крестьянки было разложено поровну в 5 кадок и весило $3\frac{1}{3}$ пуда. Первые две крестьянки продали всё своё масло, а третья — только одну кадку. Сколько денег получили три крестьянки вместе, если каждый пуд масла продавали по 12 р.?

 **1210.** Два господина держали пари: чья лошадь перегонит, тот за каждую лишнюю версту получает 200 р. Лошади бежали 8 мин, и лошадь первого в каждые $1\frac{1}{2}$ мин делала $\frac{3}{4}$ версты, а лошадь второго в каждые $2\frac{1}{3}$ мин делала $1\frac{3}{4}$ версты. Кто из них выиграл и сколько?

 **1211.** Подрядчик поставил для войска 2500 лошадей. Для кавалерии $\frac{12}{25}$ всех лошадей, для артиллерии $\frac{2}{3}$ того, что для кавалерии, а для обоза $\frac{5}{8}$ того, что для артиллерии. За лошадь для кавалерии ему заплатили $258\frac{3}{4}$ р., за лошадь для артиллерии — $\frac{2}{5}$ того, что за лошадь для кавалерии, а за лошадь для обоза — $\frac{5}{9}$ того, что за лошадь для артиллерии. Сколько получил он за всех лошадей, купленных для обоза?

 **1212.** Один писарь в $\frac{4}{9}$ часа может написать $\frac{5}{12}$ листа, другой в $\frac{5}{8}$ часа — $\frac{5}{12}$ листа, третий в $1\frac{1}{7}$ часа — $\frac{9}{14}$ листа. Сколько получат все три писаря за 1 час работы, если с каждого листа им платят $\frac{3}{5}$ рубля?

 **1213.** С луга скосили $936\frac{1}{4}$ пуда травы и полученное сено употребили на прокормление двух быков и шести коров. На сколько дней хватило этого сена, если каждому быку выдавали ежедневно $\frac{7}{8}$ пуда, каждой корове — $\frac{3}{5}$ пуда, а из $123\frac{3}{4}$ пуда травы получали $24\frac{3}{4}$ пуда сена?

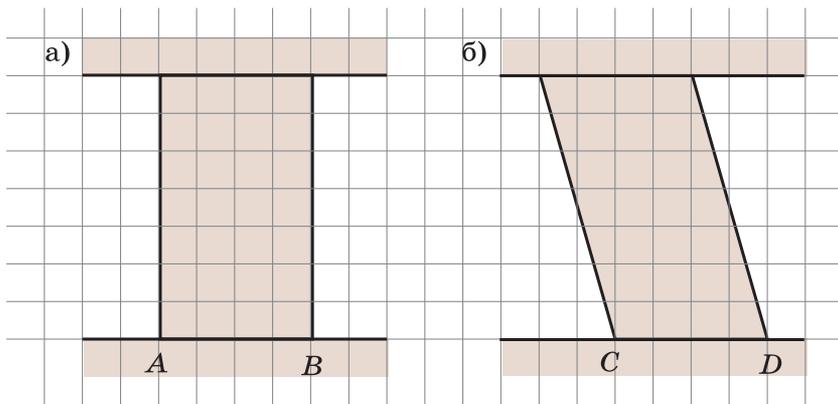


Рис. 184

1214. Бригадир подготовил два плана устройства асфальтовой дорожки через газон (рис. 184). В каком из этих случаев потребуется меньше асфальта, если отрезки AB и CD равны? Края дорожки параллельны.

1215. Человек прошёл $\frac{1}{3}$ узкого моста, когда заметил, что сзади его догоняет велосипедист. Если человек побежит назад, то встретится с велосипедистом в начале моста, а если побежит вперёд, то велосипедист догонит его в конце моста. Во сколько раз скорость велосипедиста больше скорости бегущего человека?

- Ар 106
- Величина 77
- Вершина угла 92
- многоугольника 126
 - прямоугольного параллелепипеда 110
 - треугольника 98
 - четырёхугольника 101
- Вынесение общего множителя за скобки 28
- Вычитаемое 16
- Гектар 106
- Градус 93
- Грамм 115
- Делимое 41
- Делитель 143
- Дециметр 84
- Диагональ многоугольника 128
- Диаметр 89
- Длина ломаной 126
- Дополнительный множитель 177
- Дроби взаимно обратные 197
- Дробная часть смешанной дроби 215
- Дробь неправильная 181
- несократимая 169
 - обратная данной 197
 - обыкновенная 164
 - правильная 181
 - смешанная 214
 - сократимая 169
- Единицы времени 116
- длины 81, 84
 - массы 115
 - объёма 112
 - площади 105
- Знаменатель дроби 164
- Измерение длины отрезка с избытком 82
- — — с недостатком 82
 - — — с округлением 82
- Касательная 97
- Квадрат 102
- числа 39
- Килограмм 115
- Координатный луч 227
- Кратное 149
- Круг 89
- Куб 110
- числа 39
- Литр 113
- Ломаная 125
- Луч 78
- Миллиметр 84
- Минута 93, 116
- Многоугольник 126
- Множитель 22
- Наибольший общий делитель 147
- Наименьшее общее кратное 150
- Неполное частное 52
- Общее кратное 149
- Общий делитель 147
- знаменатель 177
- Объём прямоугольного параллелепипеда 113, 232
- Окружность 89
- Основание степени 38
- Основное свойство дроби 169
- Остаток 52
- Отрезок 79
- единичный 81
- Переместительный закон сложения 14, 188
- — умножения 22, 201
- Периметр многоугольника 126
- треугольника 98
 - четырёхугольника 101
- Площадь прямоугольника 106, 230
- Позиционная система счисления 7
- Показатель степени 38
- Признаки делимости 137
- Произведение 22, 196
- Прямая 78
- Прямоугольник 102
- Прямоугольный параллелепипед 109
- Прямые параллельные 78
- перпендикулярные 94

- Радиус окружности 89
- Разложение на простые множители 144
- Разность 16, 191
- Раскрытие скобок 28
- Распределительный закон 27, 201
- Расстояние между точками 82
- Ромб 105

- Сантиметр 84
- Свойства делимости 135
- Система счисления двоичная 67
 - — десятичная 7, 67
- Слагаемое 13
- Смешанная дробь 214
- Сокращение дроби 169
- Сочетательный закон сложения 14, 189
 - — умножения 23, 201
- Среднее арифметическое 228
- Степень числа 38
- Стороны треугольника 98
 - угла 92
- Сумма 14, 184
- Сфера 90

- Тонна 115
- Точка касания 97
- Треугольник 98
 - остроугольный 98
 - прямоугольный 98
 - равнобедренный 98
 - равносторонний 98

- тупоугольный 98
- Углы вертикальные 97
 - смежные 97
- Угол 92
 - прямой 93
 - острый 93
 - развёрнутый 93
 - тупой 94
- Уменьшаемое 16

- Хорда 89

- Целая часть смешанной дроби 215
- Центнер 116
- Центр окружности 89
- Цифра 7

- Частное 41, 203
 - неполное 52
- Четырёхугольник 101
- Числа взаимно обратные 197
 - — простые 147
 - многозначные 7
 - натуральные 5
 - однозначные 7
 - простые 141
 - рациональные 164
 - составные 142
- Числитель дроби 164
- Числовое выражение 56

- Шар 90

ГЛАВА 1

23. а) 250 цифр; б) 90 страниц. **24.** 20 раз. **40.** Нельзя. **69.** 2 р. **73.** 300 комаров. **74.** 150 приборов. **75.** а) 810 кг; б) 1270 ящиков. **79.** а) На 3; б) на 1. **102.** 24 квартиры. **103.** а) 1840 ящиков; б) 57 деталей. **104.** а) 2 р. 5 к.; б) 380 м. **114.** а) 3700; в) 370. **118.** а) 1000. **132.** а) 491; в) 362; д) 520. **150.** а) 48 р.; б) 9720 тарелок. **171.** 2 и 4. **193.** а) На 9 телег; б) в 30 пакетов; в) 120 м. **194.** а) 60 марок; б) 6 карасей. **195.** 60 бочек. **198.** а) 224 км; б) 70 страниц. **200.** а) В 6 раз; б) в 7 раз. **201.** 11 р. **203.** а) 60 р. **206.** 100 р. **208.** а) 54 страницы; б) за 3 ч. **209.** 700 деталей. **211.** а) 10 и 18. **212.** а) 26 и 30 человек. **216.** 18 коров. **219.** а) 100 и 250 г; б) 240 и 600 г. **223.** а) 240 пачек; б) 200 пачек. **226.** а) 40 р.; б) 18 мест. **227.** а) 24 р. **229.** а) 117 страниц; б) 18 р. **230.** В дороге 5 дней, в Москве 40 дней, в деревне 320 дней. **253.** 1 человек. **254.** 35 человек. **255.** На шестнадцатом. **256.** Четвёртый. **266.** а) 833; б) 32; в) 261; г) 331. **280.** б) 34 пассажира. **283.** а) 9 и 16 грибов; б) 20 мальчиков и 16 девочек. **284.** а) 125 и 105. **285.** а) 225 и 207; б) 203 и 334. **288.** а) На 20 книг; б) 15 тетрадей; в) 5 р. **289.** 400 г. **290.** 17.03.51. **309.** а) 37; б) 75; в) 357; г) 123. **310.** а) 81 или 29; б) 48 или 84; в) 753; г) 928. **311.** а) 3200 км; б) 5000 км. **315.** а) 15, 13 и 10 лет; б) 80, 69 и 46 медалей. **316.** в) 17 учащихся. **322.** 56 способов. **323.** 16 способов. **324.** 72 способа. **330.** 7 частей. **331.** 8 брёвен по 4 м и 2 бревна по 5 м. **332.** 7 мин 30 с. **335.** 11 способами. **338.** Богач потерял 58 р. 83 к.

ГЛАВА 2

349. 6 прямых. **352.** На 4, 6 и 7 частей. **357.** 6 лучей. **360.** Б. **367.** 19 см. **368.** 3 см. **369.** а) 7 см; б) 19 см. **370.** 9 и 17 см. **371.** 2 решения: 14 и 180 см. **377.** а) 36 см; б) 37 см; в) 37 см. **389.** а) 17 км; б) 18 км; в) 18 км. **434.** 105° и 75° . **451.** 16 и 17 см. **452.** 9, 9, 12 см и 11, 11, 8 см. **463.** а) 42 см. **465.** а) 160 см. **466.** а) 208 см. **467.** 11 см. **468.** а) 10 см; б) 16 см^2 . **470.** 14 см. **477.** 5 см. **481.** а) В 100 раз. **483.** 10 м. **484.** 100 м. **485.** В 225 раз. **488.** 13 см. **490.** а) 25 см^2 . **500.** а) 150 см^2 . **504.** а), в), г). **507.** 27. **508.** а) 27, 8 и 1 кубик. **511.** а) 100 м; б) 10 км. **512.** а) 1440 см^3 . **513.** а) 680 см^3 . **515.** 9 раз. **542.** 73 км. **543.** а) 5 ч; б) 5 ч. **546.** а) 2 км/ч; б) за 12 ч. **547.** На 6 км/ч. **548.** 120 км/ч. Лишние условия — высота полёта и дата события. **551.** а) Через 2 ч; б) через 10 дней. **553.** Через 1 ч и 3 ч. **555.** Через 8 дней. **556.** 156 вёрст. **557.** 6 ч. **559.** 15 мин. **560.** 25 м/мин. **561.** 2 км. Лишние условия: плывут против течения и 3 км/ч. **562.** 600 м. **563.** 2 км. **564.** а) Через 4 ч; б) через 2 ч; в) через 2 ч. **573.** а) 35; б) 170. **576.** 8 и 8 см. **581.** 31 см^2 . **585.** За 3 дня. **590.** 12 фигур. **592.** 11 развёрток. **593.** В 100 раз.

ГЛАВА 3

620. а) Да; б) нет. **621.** а) 5; б) 4; в) 5; г) 0 или 9. **643.** Потому, что сумма четырёх нечётных чисел не может быть равна 99. **653.** а) 1, 2, 3, 4, 6, 12. **659.** а) Например, $3 \cdot 664 + 6 \cdot 1 = 1998$; б) потому, что сумма $3 \cdot a + 6 \cdot b$ делится на 3, а число 1999 нет. **660.** а) $8 = 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$. **676.** а) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$. **678.** 12 человек, 5 команд. **694.** а) НОД (a, b) = $= 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$; НОК (a, b) = $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2$. **697.** а) 20 м; б) 12 м. **698.** 5 пачек. **699.** 7 и 4 оборота. **701.** Ошибается. Если произведение четырёх натуральных чисел нечётное, то эти числа нечётные, а их сумма чётная. **702.** Нельзя. **703.** Нельзя. **708.** Фигуру v . **714.** а) 11; б) 97. **715.** Нет, так как при $n = 41$ число P делится на 1, на P и на 41.

ГЛАВА 4

745. $\frac{2}{3}$. **746.** а) 23 км; б) 19 км; в) 15 км. **747.** а) $\frac{1}{4}$. **748.** а) За 5 ч. **749.** а) На $\frac{1}{3}$ расстояния. **759.** а) $\frac{2}{16}$ или $\frac{1}{8}$. **769.** а) $\frac{12}{18}$; б) $\frac{7}{63}$; в) да; г) нет. **778.** а) 16 км; б) 10 р.; в) 9 страниц. **779.** 81 км. **780.** а) 33 учащихся; б) 55 монет. **781.** а) 16 р.; б) 25 см. **782.** а) 35 лет; б) 30 лет. **783.** а) 224 кг. **784.** Жене и дочери — по 6000 р., сыновьям — по 12 000 р. **785.** 792 р. **786.** 36 р. **787.** 60 лет. **789.** 63 р. **790.** 6720 р. **811.** а) Конфеты тяжелее. **816.** е) $\frac{1995}{1996} < \frac{1996}{1997}$. **817.** а) У папы результат лучше; б) у Коли результат лучше. **818.** а) $\frac{6}{10}$ и $\frac{7}{10}$. **836.** а) $\frac{8}{7}$; б) $\frac{17}{20}$; в) $\frac{13}{30}$; г) $\frac{9}{5}$; д) $\frac{169}{300}$; е) $\frac{643}{840}$. **841.** а) Да; б) нет. **842.** 14 га. **843.** а) $\frac{5}{6}$ бассейна; б) $\frac{5}{24}$ задания; в) $\frac{11}{60}$ всего пути. **859.** а) На $\frac{7}{24}$ расстояния; б) $\frac{46}{165}$ всей работы; в) $\frac{7}{40}$ сочинения. **860.** Кофе и молока поровну. **874.** $\frac{1}{4}$ поля. **875.** $\frac{1}{5}$ пути. **876.** $\frac{1}{3}$ луга. **878.** а) 9 воробьёв; б) 80 р.; в) 25 км; г) 160 марок. **879.** а) 40 р.; б) 20 р. **880.** 64 детали. **882.** 60 страниц. **883.** 8 вёрст. **884.** 28 флоринов. **918.** а) 27; б) 4; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{10}$; д) $\frac{21}{25}$; е) $\frac{16}{17}$. **919.** а) 48; б) 55; в) $\frac{11}{15}$; г) $\frac{4}{5}$; д) $\frac{5}{7}$; е) 1. **920.** а) $\frac{11}{5}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{1}{5}$. **937.** а) $\frac{10}{27}$; б) $\frac{16}{27}$. **938.** а) $\frac{12}{5}$; б) $\frac{5}{4}$. **939.** а) $\frac{15}{2}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{4}{3}$; г) $\frac{2}{3}$; д) 4; е) $\frac{1}{6}$; ж) $\frac{3}{2}$; з) $\frac{1}{2}$; и) 2; к) $\frac{3}{4}$. **940.** а) $\frac{7}{6}$; б) 4; в) 1. **941.** а) $\frac{11}{3}$; б) 4; в) $\frac{21}{5}$; г) 16. **942.** а) 15; б) 49. **945.** Не получилось. **946.** а) 150; б) 363. **947.** а) На 10 дней; б) 25 авто-

машин. **948.** а) 300; б) 49. **949.** 3 м 45 см. **951.** $\frac{7}{8}$. **955.** а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$ бассейна; б) $\frac{1}{2}$ бассейна, за 2 ч; в) за 6 мин. **956.** Через 6 дней. **957.** а) За 12 ч; б) за 12 мин; в) через 12 ч. **958.** На 18 дней. **959.** На 30 дней. **960.** За 15 ч. **962.** Через 90 мин. **963.** 3 ч 20 мин. **964.** а) За $\frac{6}{11}$ месяца; в) за $\frac{12}{25}$ года. **1015.** а) $1\frac{2}{15}$. **1028.** а) $2\frac{7}{12}$; б) $9\frac{5}{42}$; в) $10\frac{1}{90}$; г) 19. **1029.** а) $9\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{8}$; в) 12; г) $\frac{2}{3}$; д) $\frac{25}{39}$; е) $9\frac{7}{9}$. **1036.** а) $6\frac{1}{2}$ и 8; б) $\frac{7}{27}$ и $\frac{8}{27}$. **1041.** 23 года. **1042.** 27 лет. **1048.** 5 банок. **1049.** 10 ящиков. **1054.** 156 000 л, 6240 л. **1056.** 36 м³. **1060.** а) 2 ч; б) 6 ч. **1061.** а) 4 ч; б) 6 ч. **1062.** а) 10 мин; б) 6 мин. **1063.** а) 24 мин; б) 24 мин. **1064.** а) 15 мин; б) 6 мин. **1065.** а) 40 мин; б) 24 мин. **1066.** а) 24 дня; б) 35 суток. **1069.** 200 $\frac{25}{36}$ гривны. **1070.** $\frac{6}{11}$. **1071.** 30 к. **1074.** 1 р. **1075.** Нельзя. **1076.** Первая. **1077.** б) 22 конфеты. **1078.** а) 30 р.; б) 18 р. **1079.** а) Сможет, взяв 2 целые шоколадки. **1080.** 43 яйца. **1081.** 24, 12, 6 лошадей. **1083.** а) Певцов больше; б) говорящих по-английски больше; в) ответить на вопрос задачи нельзя. **1085.** Золота, меди, олова и железа было $30\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$, $14\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ мины. **1086.** а) 35 не делится на 3. **1087.** а) Послушных детей и мальчиков поровну. **1088.** 16 км.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1097. а) 9360; б) 101. **1098.** а) 320; б) 1. **1100.** а) 100; б) 0. **1101.** а) 800; б) 112 200; в) 250; г) 49 920; д) 3 119 300; е) 1081; ж) 12; з) 2; и) 1. **1102.** а) 0; б) 2. **1115.** 2. **1116.** $\frac{1}{9}$. **1117.** 2. **1118.** 6. **1119.** $26\,963\frac{8}{9}$. **1120.** 2. **1121.** 36 162. **1122.** 5. **1123.** 0. **1124.** 4. **1125.** $1\frac{1}{3}$. **1126.** 1. **1127.** 3. **1128.** 18. **1129.** $78\frac{4}{5}$. **1130.** $10\frac{3}{8}$. **1131.** $4\frac{8}{9}$. **1132.** $6\frac{1}{3}$. **1133.** 2. **1134.** 194. **1135.** 5. **1136.** а) 10; б) $2\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{16}$; г) 13; д) 14; е) 8. **1137.** а) 42 девочки; б) 56 лет; в) $22\frac{1}{2}$ га. **1138.** а) 201 марка; б) 9 р.; в) 31 человек; г) 106 кг. **1139.** а) 83 ореха; б) 312 орехов. **1140.** По 2000 р. **1141.** 5 вёдер. **1142.** 4. **1143.** а) 5 детей; б) 6 ваз. **1144.** а) 25 учащихся, 69 тетрадей; б) 396 стульев. **1145.** 11 бедных. **1146.** а) 14; б) 5. **1147.** 16 мальчиков. **1148.** 12 кроликов и 23 фазана. **1149.** 3 жука.

1150. а) 650 р.; б) 18 р. 20 к. **1151.** а) 18 коров по 18 р. и 26 коров по 26 р.; б) 63 аршина синего и 75 аршин чёрного сукна. **1152.** а) 6 к.; б) 24 фунта первого сорта и 8 фунтов второго. **1153.** 100 старых баранов и 12 молодых. **1154.** 80 р. **1155.** а) 9 и 3 книги; б) 5 и 3 яблока; в) 13, 7 и 4 яблока. **1156.** а) 11 р. 25 к. и 10 р. 47 к. **1157.** 400 г. **1158.** а) За 12 дней; б) за 2 ч; в) за 6 мин; г) через 6 ч. **1159.** а) За 4 ч; б) за 6 ч. **1160.** 125 кг. **1161.** а) 20, 25, 30 и 35 р. **1162.** 3 км/ч. **1163.** 6 и 3 яблока. Замечание. Яблоки даны только за те поленья, которыми воспользовалась третья соседка. **1164.** 7 котят. **1165.** 27 р. **1166.** 55 км/ч и 45 км/ч. **1167.** г) $2\frac{1}{2}$ км/ч; д) 3 км/ч. **1169.** а) 18 и 27; б) 90 и 45; в) 135; г) 135 и 90. **1170.** а) За 3 мин; б) через 24 мин; в) через 16 мин; г) за 8 мин. **1171.** б) 8 учащихся. **1172.** а) 15 р.; б) 16 км. **1173.** На 65-й версте. **1174.** 35 миль. **1175.** За 11 дней. **1176.** 9 ч. **1177.** а) 4 ч. **1178.** 6 р. 48 к. **1179.** а) За 8 дней; б) за 60 мин; в) за 72 дня. **1180.** Через $3\frac{15}{16}$ дня. **1181.** За 5 дней и 4 ч. **1182.** в) 12 р. **1183.** 10 отрезков и 10 лучей. **1188.** а) 6 а. **1189.** а) 10 м. **1190.** а) 500 м. **1191.** а) 1000 м/мин. **1192.** а) 5 м/с; г) 10 м/с. **1194.** 25×25 м. **1201.** а) 3 решения: 20° и 80°, 52° и 208°, 25° и 100°; б) 3 решения: 40° и 60°, 120° и 140°, 80° и 100°. **1205.** 16.35, через $12\frac{1}{2}$ суток. **1206.** 320 страниц. **1207.** 51 выстрел. **1208.** Второй, на 2 версты. **1209.** 44 р. **1210.** Второй выиграл 400 р. **1211.** 28 750 р. **1212.** 1 р. 30 к. **1213.** На 35 дней. **1215.** В 3 раза.

Оглавление

ГЛАВА 1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И НУЛЬ	5
1.1. Ряд натуральных чисел	—
1.2. Десятичная система записи натуральных чисел	7
1.3. Сравнение натуральных чисел	11
1.4. Сложение. Законы сложения.	13
1.5. Вычитание	16
1.6. Решение текстовых задач с помощью сложения и вычитания.	19
1.7. Умножение. Законы умножения.	22
1.8. Распределительный закон	27
1.9. Сложение и вычитание чисел столбиком	30
1.10. Умножение чисел столбиком.	34
1.11. Степень с натуральным показателем.	38
1.12. Деление нацело	41
1.13. Решение текстовых задач с помощью умножения и деления	43
1.14. Задачи «на части».	48
1.15. Деление с остатком	51
1.16. Числовые выражения	56
1.17. Задачи на нахождение двух чисел по их сумме и разности	60
Дополнения к главе 1	63
1. Вычисления с помощью калькулятора	—
2. Исторические сведения	65
3. Занимательные задачи	70
ГЛАВА 2. ИЗМЕРЕНИЕ ВЕЛИЧИН	77
2.1. Прямая. Луч. Отрезок	—
2.2. Измерение отрезков	81
2.3. Метрические единицы длины	84
2.4. Представление натуральных чисел на координатном луче	86
2.5. Окружность и круг. Сфера и шар	89
2.6. Углы. Измерение углов	92
2.7. Треугольники	98
2.8. Четырёхугольники	101
2.9. Площадь прямоугольника. Единицы площади	105
2.10. Прямоугольный параллелепипед	109

2.11.	Объём прямоугольного параллелепипеда. Единицы объёма	112
2.12.	Единицы массы	115
2.13.	Единицы времени	116
2.14.	Задачи на движение	118
	Дополнения к главе 2	125
	1. Многоугольники	—
	2. Исторические сведения	130
	3. Занимательные задачи	132
	ГЛАВА 3. ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ	135
3.1.	Свойства делимости	—
3.2.	Признаки делимости	137
3.3.	Простые и составные числа	141
3.4.	Делители натурального числа	143
3.5.	Наибольший общий делитель	147
3.6.	Наименьшее общее кратное	149
	Дополнения к главе 3	152
	1. Использование чётности при решении задач	—
	2. Исторические сведения	157
	3. Занимательные задачи	159
	ГЛАВА 4. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ	163
4.1.	Понятие дроби	—
4.2.	Равенство дробей	168
4.3.	Задачи на дроби	173
4.4.	Приведение дробей к общему знаменателю	177
4.5.	Сравнение дробей	180
4.6.	Сложение дробей	184
4.7.	Законы сложения	188
4.8.	Вычитание дробей	191
4.9.	Умножение дробей	196
4.10.	Законы умножения. Распределительный закон	201
4.11.	Деление дробей	203
4.12.	Нахождение части целого и целого по его части	208
4.13.	Задачи на совместную работу	210
4.14.	Понятие смешанной дроби	214
4.15.	Сложение смешанных дробей	217

4.16. Вычитание смешанных дробей.	220
4.17. Умножение и деление смешанных дробей	223
4.18. Представление дробей на координатном луче.	226
4.19. Площадь прямоугольника. Объём прямоугольного параллелепипеда	230
Дополнения к главе 4	235
1. Сложные задачи на движение по реке	—
2. Исторические сведения	237
3. Занимательные задачи	240
Задания для повторения	246
Предметный указатель	264
Ответы	266

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Никольский Сергей Михайлович
Потапов Михаил Константинович
Решетников Николай Николаевич
Шевкин Александр Владимирович

МАТЕМАТИКА

5 класс

Учебник для общеобразовательных организаций

Редакция математики и информатики

Заведующий редакцией *Е. В. Эргле*, ответственный за выпуск *И. В. Рекман*, редакторы *Т. Г. Войлокова*, *И. В. Рекман*, младший редактор *Е. В. Трошко*, художники *О. П. Богомолова*, *А. Г. Воробьёв*, художественный редактор *Т. В. Глушкова*, компьютерная графика *А. Г. Вьюниковской*, техническое редактирование и компьютерная вёрстка *Е. В. Саватеева*, корректор *О. В. Крупенко*

Подписано в печать 30.07.2021.

Формат 70 × 90¹/₁₆. Гарнитура Школьная, Прагматика.
 Уч.-изд. л. 13,11+0,51 форз. Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение». Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — vopros@prosv.ru.

Латинский алфавит

Печатные буквы	Рукописные буквы	Названия букв	Печатные буквы	Рукописные буквы	Названия букв
Aa	<i>Aa</i>	а	Nn	<i>Nn</i>	эн
Bb	<i>Bb</i>	бэ	Oo	<i>Oo</i>	о
Cc	<i>Cc</i>	цэ	Pp	<i>Pp</i>	пэ
Dd	<i>Dd</i>	дэ	Qq	<i>Qq</i>	ку
Ee	<i>Ee</i>	е	Rr	<i>Rr</i>	эр
Ff	<i>Ff</i>	эф	Ss	<i>Ss</i>	эс
Gg	<i>Gg</i>	гэ(жэ)	Tt	<i>Tt</i>	тэ
Hh	<i>Hh</i>	аш	Uu	<i>Uu</i>	у
Ii	<i>Ii</i>	и	Vv	<i>Vv</i>	вэ
Jj	<i>Jj</i>	йот(жи)	Ww	<i>Ww</i>	дубль-вэ
Kk	<i>Kk</i>	ка	Xx	<i>Xx</i>	икс
Ll	<i>Ll</i>	эль	Yy	<i>Yy</i>	игрек
Mm	<i>Mm</i>	эм	Zz	<i>Zz</i>	зэт

Таблица простых чисел (до 997)

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Метрическая система мер

Меры длины

$$1 \text{ км} = 1\,000 \text{ м}$$

$$1 \text{ м} = 10 \text{ дм}$$

$$1 \text{ дм} = 10 \text{ см}$$

$$1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$$

Меры площади

$$1 \text{ км}^2 = 1\,000\,000 \text{ м}^2$$

$$1 \text{ м}^2 = 100 \text{ дм}^2$$

$$1 \text{ га} = 100 \text{ а}$$

$$1 \text{ а} = 100 \text{ м}^2$$

Меры объёма

$$1 \text{ м}^3 = 1\,000 \text{ дм}^3$$

$$1 \text{ дм}^3 = 1\,000 \text{ см}^3$$

$$1 \text{ л} = 1 \text{ дм}^3$$

$$1 \text{ см}^3 = 1\,000 \text{ мм}^3$$

Меры массы

$$1 \text{ т} = 1\,000 \text{ кг}$$

$$1 \text{ ц} = 100 \text{ кг}$$

$$1 \text{ кг} = 1\,000 \text{ г}$$

$$1 \text{ г} = 1\,000 \text{ мг}$$

	1 мм	1 см	1 дм	1 м	10 м	100 м	1 км
	1 мм ²	1 см ²	1 дм ²	1 м ²	1 а	1 га	1 км ²
	1 мм ³	1 см ³	1 дм ³	1 м ³	10 ³ м ³	10 ⁶ м ³	1 км ³

Старинные российские денежные единицы

1 рубль = 100 копеек

1 гривенник = 10 копеек

1 алтын = 3 копейки

1 деньга = 1/2 копейки

1 полушка = 1/2 деньга

Старинные российские меры длины

(уточнены в XVIII в. указом Петра I)

1 миля = 7 вёрст \approx 7 км 469 м

1 верста = 500 сажений \approx 1 км 67 м

1 сажень = 3 аршина = 7 футов \approx 2 м 13 см

1 аршин = 16 вершков \approx 71 см

1 фут = 12 дюймов \approx 30 см 5 мм

1 дюйм = 10 линий \approx 2 см 5 мм

1 линия = 10 точек

Старинные российские меры веса

1 пуд = 40 фунтов \approx 16 кг 380 г

1 фунт = 32 лота \approx 410 г

1 лот = 3 золотника \approx 13 г

1 золотник = 96 долей \approx 4 г

Английские меры длины

1 миля = 1 760 ярдов \approx 1 км 609 м

1 ярд = 3 фута \approx 91 см 4 мм

1 фут = 12 дюймов \approx 30 см 5 мм

1 дюйм = 12 линий \approx 2 см 5 мм